

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revista_oim/

Edita:



PROBLEMAS DE NIVEL MEDIO Y DE OLIMPIADAS (22)

Algunos problemas propuestos en las Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Educación Secundaria de Baleares, Cataluña y Valencia, en 2005.

Agradecemos a los Prof. José Luis Díaz-Barrero y Miguel Amengual Covas la gentileza de habernos proporcionado los enunciados y autorizado su publicación.

22.1: Valencia 2005

Sea $\alpha = \frac{2004}{2005}$. Demostrar que para cualquier entero positivo n se verifica la desigualdad

$$\frac{1}{2005} \left[\sqrt{1 - (1 - \alpha)^2} + \sqrt{1 - (1 - \alpha^2)^2} + \dots + \sqrt{1 - (1 - \alpha^n)^2} \right] < \frac{\pi}{4}.$$

22.2: Barcelona 2005

Sea la familia de elipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que pasan por el punto $(1, 1)$. Se pide:

- La elipse de la familia de área mínima.
- Las elipses de la familia que generan un volumen mínimo al girar alrededor del eje de abscisas.

22.3: Barcelona 2005

Por el baricentro del triángulo equilátero ABC (y en su mismo plano) se traza una recta r . Demostrar que la suma de los cuadrados de las distancias de los tres vértices del triángulo a la recta no depende de la elección de ésta.

22.4: Baleares 2005

Sean P, Q, R, S los respectivos puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA del cuadrilátero convexo ABCD.

Sea O el punto de intersección de PR y QS.

Si $OA = OC$ y $OB = OD$, demostrar que ABCD es un paralelogramo.

22.5: Baleares 2005

Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación $x^2 - px + 1 = 0$, donde p es un número natural mayor o igual que 3.

Para cada número natural $n \geq 0$ definimos $a_n = x_1^n + x_2^n$.

Demostrar que a_n es entero para cada valor de n y que a_n y a_{n+1} son primos entre sí.