



**Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de
Matemática
Número 22 (Noviembre-diciembre 2005)
ISSN – 1698-277X**

Índice

Artículos, notas y lecciones de preparación olímpica

F. Bellot, **Problemas cuadráticos de Olimpiadas.**

--

Problemas para alumnos de Educación Media y de Olimpiadas

Algunos problemas propuestos en las Oposiciones de P.E.S. de Cataluña, Baleares y Valencia (2005)

--

Problemas para los más jóvenes

Cinco problemas del libro Mathematical Circles (Russian experience), de Fomin, Genkin e Itenberg.

--

Problemas

Resueltos:

Problema 101. Recibidas soluciones de: F.D. Aranda Ballesteros, Córdoba, España; José Jorge Rodríguez Pérez, Oleiros(Coruña), España; y C. Sánchez-Rubio, Benicassim (Castellón), España. Presentamos la solución de C. Sánchez Rubio.

Problema 102. Recibidas soluciones de F.D. Aranda Ballesteros, Córdoba, España; y C. Sánchez Rubio, Benicassim, Castellón, España. Presentamos la solución de C.S ánchez Rubio.

Problema 103. Recibidas soluciones de J. Álvarez Lobo, Oviedo (Asturias), España; y de Marcos Martinelli, Brasil. Presentamos la solución de J. Álvarez Lobo.

Problema 104. Recibida la solución de Marcos Martinelli, Brasil, que presentamos.

Propuestos

Propuestos 106-110

Problema 106, por J.L. Díaz Barrero, Barcelona, España.

Problema 107, por Jorge Enrique Espinoza Guevara, Lima, Perú

Problema 108, por Marcos Martinelli, Brasil

Problema 109, por J.B. Romero Márquez, Ávila, España

Problema 110, por J.B. Romero Márquez, Ávila, España.

--

Divertimentos matemáticos

Algunas citas del libro *Twenty years before the blackboard*, de M. Stauben y D. Sandford. (MAA, 1998)

--

Reseñas web

La página de Adrian Oldknow

Editor: Francisco Bellot Rosado

PROBLEMAS CUADRÁTICOS DE OLIMPIADAS

Francisco Bellot Rosado

Presentamos a continuación una serie de problemas de Olimpiadas con la característica común de hacer intervenir en ellos, en mayor o menor medida, las propiedades del trinomio de segundo grado. Aunque a primera vista podría parecer que debería tratarse de problemas o ejercicios muy sencillos (todo el mundo cree saber resolver una ecuación de segundo grado), el examen de los ejemplos que presentamos quizá haga variar semejante opinión.

Recordamos las relaciones de Cardano-Vieta para el polinomio de segundo grado :

Si α, β son las raíces (reales o complejas) del polinomio $x^2 + px + q$, la identificación de coeficientes en los dos miembros de

$$(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 + px + q$$

proporciona las igualdades

$$\begin{aligned} -(\alpha + \beta) &= p \\ \alpha\beta &= q. \end{aligned}$$

El método de completamiento de cuadrado aplicado al polinomio

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

permite escribirlo en la forma

$$P(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a},$$

de donde se deduce la conocida fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La expresión $\Delta = b^2 - 4ac$ es el discriminante, porque separa las raíces : Si $\Delta > 0$, $P(x)$ tiene dos raíces reales, si $\Delta = 0$ tiene una raíz real doble; si $\Delta < 0$, no tiene raíces reales.

Problema 1

Si $P(x) = x^2 + ax + b, Q(x) = x^2 + px + q$, hallar la condición para que los dos polinomios tengan una raíz común.

Solución

Si x_1, x_2 son las raíces (reales o complejas) de P , sustituyéndolas en Q y calculando $Q(x_1) \cdot Q(x_2)$, obtenemos

$$Q(x_1) \cdot Q(x_2) = x_1^2 x_2^2 + q(x_1^2 + x_2^2) + px_1 x_2(x_1 + x_2) + p^2 x_1 x_2 + pq(x_1 + x_2) + q^2$$

De las relaciones de Cardano-Vieta para P resulta que

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= -a \\x_1 x_2 &= b \\x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = a^2 - 2b\end{aligned}$$

así que sustituyendo en la expresión anterior resultará

$$Q(x_1) \cdot Q(x_2) = (q - b)^2 + (p - a)(bp - aq),$$

y como, evidentemente, la condición para que una de las raíces de P sea también raíz de Q es $Q(x_1) \cdot Q(x_2) = 0$, resulta la condición necesaria y suficiente buscada escrita como

$$(q - b)^2 + (p - a)(bp - aq) = 0.$$

Problema 2

Sea $f(x) = a^2 x^2 - (b^2 - 2ac)x + c^2$, con $a, b, c \in \mathbb{Q}_+^*$. Probar que si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = 0$, entonces n es cuadrado perfecto.

(Cr. Mortici, *Gazeta Matematică 1987, Rumania*)

Solución

Las raíces de la ecuación son

$$\frac{b^2 - 2ac \pm b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a^2};$$

para que alguna de ellas sea entera, debe existir k entero tal que $b^2 - 4ac = k^2$. Entonces se tiene

$$b^2 - k^2 = 4ac, \quad \frac{b^2 - k^2}{2} = 2ac$$

así que sustituyendo en la expresión para las raíces de la ecuación se obtiene

$$\frac{b^2 - \frac{b^2 - k^2}{2} \pm bk}{2a^2} = \frac{b^2 + k^2 \pm 2bk}{4a^2} = \left(\frac{b \pm k}{2a}\right)^2, \text{ que es un cuadrado.}$$

Problema 3

Sea a un número real dado. Calcular los números reales x_1, \dots, x_n que son soluciones del sistema

$$\left. \begin{aligned}x_1^2 + ax_1 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 &= x_2 \\x_2^2 + ax_2 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 &= x_3 \\&\dots \\x_{n-1}^2 + ax_{n-1} + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 &= x_n \\x_n^2 + ax_n + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 &= x_1\end{aligned} \right\}$$

(Torneo de las Ciudades)

Solución

Sumando miembro a miembro todas las ecuaciones :

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + (a-1)(x_1 + \cdots + x_n) + n \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = 0$$

y el primer miembro se escribe como

$$x_1^2 + (a-1)x_1 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 + \cdots + x_n^2 + (a-1)x_n + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = 0,$$

es decir

$$\left(x_1 + \frac{a-1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(x_n + \frac{a-1}{2}\right)^2 = 0,$$

luego todos los paréntesis deben ser nulos y así se obtiene

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{1-a}{2}.$$

Inmediatamente se comprueba por sustitución directa que esta solución verifica las ecuaciones iniciales del sistema.

Problema 4

Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes reales tal que $f(x) \geq 0$ para todo x real. Demostrar que $f(x)$ puede escribirse en la forma

$$f(x) = (g_1(x))^2 + (g_2(x))^2 + \cdots + (g_n(x))^2,$$

donde los g_i son polinomios con coeficientes reales.

(Propuesto por Hungría, no usado, IMO 1973)

Solución (de M^a Ascensión López Chamorro)

f tiene que ser de grado par y tendrá un mínimo absoluto mayor o igual que 0; además el coeficiente principal y el término independiente son positivos.

Si f es de segundo grado,

$$f(x) = ax^2 + bx + c = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\sqrt{c - \frac{b^2}{4a}}\right)^2$$

y esa descomposición responde a las condiciones del problema (en este caso, g_2 es un polinomio constante).

Procedemos a continuación por inducción sobre el grado del polinomio f : supongamos la proposición cierta para cualquier polinomio de grado $2(n-1)$; sea $gr(f) = 2n$ y $\beta = f(\alpha) \geq 0$ el mínimo del polinomio f . Entonces

$$f(x) - \beta = (x - \alpha)^2 f_{2(n-1)}(x) = (x - \alpha)^2 \sum_{h=1}^k (g_h(x))^2$$

así que en este caso se tiene

$$f(x) = \sum_{h=1}^k ((x - \alpha)^2 g_h(x))^2 + (\sqrt{\beta})^2$$

y hemos terminado la fase inductiva, lo que prueba la proposición.

Problema 5

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Resolver (¡numéricamente!) la ecuación

$$(ax - b)^2 + (bx - a)^2 = x,$$

sabiendo que admite una raíz entera.

(M. Becheanu, *Gazeta Matematică, Rumania*)

Comentario

Este es, en mi opinión, "el más bello problema sobre la ecuación de segundo grado jamás propuesto"; la solución es del proponente del problema, Mircea Becheanu, Jefe de la Delegación Rumana en la IMO.

Solución

Si $a = b = 0$, la ecuación es de primer grado, con solución única $x = 0$.

Supongamos $a \neq 0$ ó $b \neq 0$. La ecuación es

$$(a^2 + b^2)x^2 - (4ab + 1)x + a^2 + b^2 = 0,$$

de segundo grado, con raíces x_1, x_2 , siendo $x_1 \in \mathbb{Z}$. Como

$$x_1 = (ax_1 - b)^2 + (bx_1 - a)^2,$$

deducimos que x_1 es, además de entero, positivo. Como las raíces son reales, el discriminante de la ecuación será mayor o igual que cero:

$$(4ab + 1)^2 - 4(a^2 + b^2)^2 \geq 0 \iff [1 - 2(a - b)^2] [1 + 2(a - b)^2] \geq 0$$

y esto exige que $1 - 2(a - b)^2 \geq 0$. Puesto que $(a - b)^2$ es natural, resulta necesariamente $(a - b)^2 = 0$, es decir, $a = b$.

Con esto, la ecuación se convierte en

$$2a^2 - (4a^2 + 1)x + 2a^2 = 0 \quad (**)$$

y, según las fórmulas de Cardano-Vieta, se tiene

$$x_1 + x_2 = 2 + \frac{1}{2a^2}, \quad x_1 x_2 = 1.$$

Observamos que, al ser $x_1 \in \mathbb{N}$, $x_1 = 0$ no puede ser raíz de (**), ni tampoco $x_1 = 1$ puede serlo. Por lo tanto, $x_1 \geq 2$. Ya que $x_2 = \frac{1}{x_1} > 0$, entonces $x_1 < x_1 + x_2 = 2 + \frac{1}{2a^2} < 3$. Por lo tanto $2 \leq x_1 < 3$ con x_1 entero implica $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}$. Sustituyendo los valores resulta $a^2 = 1$, así que $a \in \{-1, 1\}$.

La única posibilidad, entonces, es $a = b = \pm 1$, con raíces $2, \frac{1}{2}$.

Problema 6

Hallar una condición necesaria y suficiente para que la ecuación $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$, tenga una de sus raíces igual al cuadrado de la otra.

(*Cruz Mathematicorum 1973, Canadá*)

Solución

Sean r y r^2 las raíces; entonces

$$r^2 + r = -\frac{b}{a}, \quad r^3 = \frac{c}{a}.$$

Puesto que se verifica

$$(r^2 + r)^3 = r^3 (r + 1)^3 = r^3 (r^3 + 3(r^2 + r) + 1)$$

se tiene la condición necesaria

$$\left(-\frac{b}{a}\right)^3 = \frac{c}{a} \left(\frac{c}{a} - 3\frac{b}{a} + 1\right) \iff b^3 + ca(c+a) = 3abc \quad (*).$$

Esta condición es suficiente, porque si (*) se cumple, y llamamos R, r a las raíces, sustituyendo $-\frac{b}{a} = R + r$, $\frac{c}{a} = Rr$, en la primera de las dos expresiones (*) se obtiene

$$(R + r)^3 = Rr [Rr + 3(R + r) + 1] \iff (R^2 - r)(R - r^2) = 0,$$

lo que prueba que una de las raíces es el cuadrado de la otra.

Problema 7

Resolver la ecuación

$$\left[\frac{2x^2}{x^2 + 1} \right] = x,$$

siendo $\lfloor \rfloor$ la parte entera.

(*Gazeta Matematică, Rumania, 1990*)

Solución

Como $\frac{2x^2}{x^2+1} \geq 0$, $\left[\frac{2x^2}{x^2+1} \right]$ es natural, luego x es natural.

Aplicamos la desigualdad de las medias armónica y geométrica a los números positivos 1 y x^2 : se tendrá

$$\frac{2}{1 + \frac{1}{x^2}} \leq \sqrt{1 \cdot x^2} = x \implies \frac{2x^2}{x^2 + 1} \leq x \quad (1).$$

Por otra parte, como

$$\left[\frac{2x^2}{x^2 + 1} \right] \leq \frac{2x^2}{x^2 + 1},$$

resulta según el enunciado

$$x \leq \frac{2x^2}{x^2 + 1} \quad (2),$$

así que será

$$x = \frac{2x^2}{x^2 + 1},$$

de donde $x = 0$ ó $x = 1$.

Problema 8

Sean $a, b \in \mathbb{N}^*$ y la ecuación $(x - a)^2 + (x - b)^2 = 2ab - 1$.

Demostrar que :

i) la ecuación no tiene raíces racionales.

ii) Si $b = a + 1$, entonces la ecuación tiene raíces reales, y en este caso hallar la parte entera de las raíces de la ecuación.

(*Gazeta Matematică, Rumania*)

Solución

i) La ecuación se puede escribir como

$$2x^2 - 2(a + b)x + (a - b)^2 + 1 = 0.$$

La siguientes condiciones son equivalentes:

$$\begin{aligned} x_1, x_2 \in \mathbb{Q} &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \left[(a + b)^2 - 2(a - b)^2 - 2 \right] = k^2, \\ &\iff (a + b)^2 - 2(a - b)^2 - 2 = l^2, l \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Sean $p = a + b, q = a - b$. Como p y q son de la misma paridad, distinguiremos dos casos:

1) $p = 2u, q = 2v$, con $u, v \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$(a + b)^2 - 2(a - b)^2 - 2 = 4u^2 - 8v^2 - 2.$$

Puesto que 2 divide a $4u^2 - 8v^2 - 2$, pero 4 no, es imposible que $4u^2 - 8v^2 - 2$ sea un cuadrado perfecto.

2) $p = 2u + 1, q = 2v + 1$. En este caso,

$$(a + b)^2 - 2(a - b)^2 - 2 = 4u(u + 1) - 8v(v + 1) - 3 = 8t + 5, t \in \mathbb{Z}.$$

Como el resto de la división por 8 de un cuadrado perfecto puede ser 0, 1 ó 4, tampoco en este caso Δ es un cuadrado perfecto.

Por lo tanto, las raíces de la ecuación no son racionales.

ii) Si $b = a + 1$, la ecuación es $x^2 - (2a + 1)x + 1 = 0$, cuyo discriminante es $4a^2 + 4a - 3$. Como $a \in \mathbb{N}^*$, $\Delta \geq 5$, así que las raíces son reales y distintas : $x_1 < x_2$. Sea la función

$$f(x) = x^2 - (2a + 1)x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Se tiene : $f(0) = 1 > 0$; $f(1) = 1 - 2a < 0$; $f(2a) = 1 - 2a < 0$, $f(2a + 1) > 0$. Resulta así

$$0 < x_1 < 1 < 2a < x_2 < 2a + 1$$

y $[x_1] = 0, [x_2] = 2a$.

Problema 9

Demostrar que $n^4 + 4$ nunca es primo si $n > 1$ (Sophie Germain)

Generalización : $4^n + n^4$ no es primo si $n > 1$.

(Olimpiada de Brasil)

Solución

Se tiene

$$n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2 = (n^2 + 2 - 2n)(n^2 + 2 + 2n)$$

Es claro que el último factor es mayor que 1. En cuanto al otro,

$n^2 + 2 - 2n = (n - 1)^2 + 1$ es igualmente mayor que 1 si $n \neq 1$.

Generalización :

Si n es par, es obvio que $4^n + n^4$ es par y mayor que 2, luego no es primo.

Estudiaremos el caso impar utilizando la identidad (llamada de Sophie Germain)

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2 + \sqrt{2}xy)(x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy).$$

Entonces, si $n = 2k + 1, 4^n = 4^{2k+1} = (\sqrt{2} \cdot 2^k)^4$, así que podemos escribir

$$4^n + n^4 = (\sqrt{2} \cdot 2^k)^4 + n^4 = (2^n + n^2 + 2^{k+1} \cdot n)(2^n + n^2 - 2^{k+1} \cdot n)$$

Comprobemos finalmente que el menor de los dos factores anteriores no es igual a 1:

$$\begin{aligned} 2^n + n^2 - 2^{k+1} \cdot n &= 2^{2k+1} + (2k+1)^2 - 2^{k+1}(2k+1) = \\ &= 2 \cdot 2^{2k} - 2 \cdot 2^{2k}(2k+1) + (2k+1)^2 = [2^k - (2k+1)]^2 + 2^{2k} \geq 5 \text{ pues } \\ &k > 0. \end{aligned}$$

Problema 10

Hallar los números reales positivos x, y sabiendo que las cuatro medias

$$a = \frac{x+y}{2}, g = \sqrt{xy}, h = \frac{2xy}{x+y}, k = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

son números naturales cuya suma vale 66.

(Olimpiada de la República Checa, 1995)

Solución

Ya que 66 no es divisible por 4, no puede ser $a = g = h = k$, en consecuencia, por la desigualdad de las medias, será

$$h < g < a < k.$$

Sea c el máximo común divisor de a y g . Entonces

$a = ca_1, \quad g = cg_1$ donde $g_1 < a_1$ son primos entre sí.

Ya que $h = \frac{g^2}{a} = \frac{cg_1^2}{a_1}$, el número c debe ser divisible por a_1 , es decir $c = da_1$ para algún número natural d . Las cuatro medias se pueden ahora expresar mediante d, a_1, g_1 :

$$h = dg_1^2, \quad g = da_1g_1, \quad a = da_1^2, \quad k = \sqrt{2a^2 - g^2} = da_1\sqrt{2a_1^2 - g_1^2}.$$

Ya que la raíz cuadrada de un número natural es natural o irracional, el número $\sqrt{2a_1^2 - g_1^2}$ debe ser natural (que es además mayor que a_1 , porque $g_1 < a_1$). De aquí que el tercer y cuarto sumandos de la igualdad

$$dg_1^2 + da_1g_1 + da_1^2 + da_1\sqrt{2a_1^2 - g_1^2} = 66 \quad (*)$$

son los dos mayores que a_1^2 (ya que $d \geq 1$). De aquí se sigue que $2a_1^2 < 66$, es decir, $a_1 < 5$. Se comprueba fácilmente que de las diez raíces cuadradas

$$\sqrt{2a_1^2 - g_1^2}, \quad 1 \leq g_1 < a_1 \leq 5$$

la única que es entera es $\sqrt{2 \cdot 5^2 - 1^2}$, con $a_1 = 5, g_1 = 1$.

Sustituyendo en (*) se obtiene $d = 1$, lo que da $(h, g, a, k) = (1, 5, 25, 35)$. Los números x, y son las soluciones de la ecuación

$$t^2 - 50t + 25 = 0,$$

es decir

$$\{x, y\} = \{25 + 10\sqrt{6}, 25 - 10\sqrt{6}\}.$$

Problema 11

Sea m un número real, tal que las raíces x_1 y x_2 de la ecuación

$$f(x) = x^2 + (m - 2)x + m^2 - 3m + 3 = 0$$

son reales.

- Hallar todos los valores de m para los cuales $x_1^2 + x_2^2 = 6$.
- Probar que

$$1 < \frac{mx_1^2}{1 - x_1} + \frac{mx_2^2}{1 - x_2} + 8 \leq \frac{121}{9}$$

(*Olimpiada de Bulgaria, 1995*)

Solución

- Ya que la ecuación tiene dos raíces reales, su discriminante

$$(m - 2)^2 - 4(m^2 - 3m + 3) = -3m^2 + 4m + 4 \geq 0,$$

luego $-\frac{2}{3} \leq m \leq 2$.

Por otra parte,

$$6 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = -m^2 - 2m + 10.$$

De aquí se obtiene $m = -1 \pm \sqrt{5}$, pero

$$-1 - \sqrt{5} < -\frac{2}{3} < -1 + \sqrt{5} < 2,$$

y por lo tanto sólo $m = -1 + \sqrt{5}$ es solución del problema.

b) Se tiene

$$\begin{aligned} \frac{mx_1^2}{1-x_1} + \frac{mx_2^2}{1-x_2} &= \frac{m[x_1^2(1-x_2) + x_2^2(1-x_1)]}{f(1)} \\ &= \frac{x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2(x_1+x_2)}{m-2} \\ &= \frac{m^3 - 8m^2 + 13m - 2}{m-2} \\ &= m^2 - 6m + 1. \end{aligned}$$

Entonces, si llamamos

$$F = \frac{mx_1^2}{1-x_1} + \frac{mx_2^2}{1-x_2} + 8,$$

resulta $F = (m-3)^2$, y entonces

$$\frac{121}{9} = \left(-\frac{2}{3} - 3\right)^2 \geq F > (2-3)^2 = 1.$$

Problema 12

Se considera la función cuadrática $f(x) = -x^2 + 4px - p + 1$. Sea S el área del triángulo del que dos vértices son los puntos de intersección de $f(x)$ con el eje de abscisas, mientras que el tercer vértice es el vértice de la parábola. Hallar todos los racionales p tales que S es entero.

(*Olimpiada de Bulgaria 1995*)

Solución

El discriminante de $f(x)$ es $D = 4(4p^2 - p + 1) > 0$ para todo p real. En consecuencia $f(x)$ tiene dos raíces reales x_1 y x_2 , y la parábola corta al eje x en dos puntos distintos, A y B. El vértice C de la parábola tiene coordenadas $2p$ y $h = f(2p) = 4p^2 - p + 1 > 0$. Se tiene

$$AB = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = 2\sqrt{4p^2 - p + 1}$$

Ahora calculamos

$$S = S_{ABC} = \frac{AB \cdot h}{2} = (4p^2 - p + 1)^{3/2}.$$

Llamemos $q = 4p^2 - p + 1$. Ya que q es racional, y $q^3 = S^2$ es entero, entonces q es entero también. Entonces $\frac{S}{q}$ es racional, y como su cuadrado $\left(\frac{S}{q}\right)^2 = q$ es entero, entonces $\frac{S}{q}$ es igualmente entero. Por lo tanto $q = n^2$, siendo n un entero positivo :

$$4p^2 - p + 1 - n^2 = 0.$$

Esta ecuación cuadrática (respecto de p) tiene una raíz racional exactamente cuando su discriminante $16n^2 - 15$ es el cuadrado de un número racional. Por lo tanto $16n^2 - 15 = m^2$, y no hay pérdida de la generalidad en suponer m entero positivo. De la igualdad

$$(4n - m)(4n + m) = 15$$

obtenemos

$$\left. \begin{array}{l} 4n - m = 1 \\ 4n + m = 15 \end{array} \right\} \text{ o bien } \left. \begin{array}{l} 4n - m = 3 \\ 4n + m = 5 \end{array} \right\}$$

De aquí que $n = 2, m = 7$ o bien $n = 1, m = 1$.

Los números racionales que estamos buscando son $0, 1, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}$.

Problema 13

¿Para qué funciones cuadráticas $f(x)$ existe una función cuadrática $g(x)$ tal que las raíces de la ecuación $g(f(x)) = 0$ son cuatro términos consecutivos (distintos) de una progresión aritmética y al mismo tiempo son también raíces de la ecuación $f(x) \cdot g(x) = 0$?

(Olimpiada de Chequia 2000)

Solución

Se sigue de las hipótesis que cada una de las ecuaciones $f(x) = 0, g(x) = 0$ tiene dos raíces reales, y esas 4 raíces son distintas. Llamemos x_1 y x_2 a las raíces de $f(x) = 0$. Entonces $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, donde a es un número real, $a \neq 0$. Por hipótesis, x_1 es también raíz de $g(f(x))$, luego $g(f(x_1)) = g(0) = 0$. Por lo tanto, $g(x) = 0$ admite la raíz 0; sea b la otra raíz de esta ecuación : se tendrá $g(x) = cx(x - b), c \neq 0$.

Los números 0 y b son también raíces de $g(f(x)) = 0$:

$$\begin{aligned} g(f(0)) &= cf(0)(f(0) - b) = 0, \\ g(f(b)) &= cf(b)(f(b) - b) = 0. \end{aligned}$$

Como los números 0 y b no pueden ser raíces de f , se sigue de ello que $f(0) = f(b) = b$.

Así, sobre el eje real, los dos puntos 0 y b , así como los puntos x_1 y x_2 son simétricos con respecto a la primera coordenada del vértice de la parábola

$y = f(x)$. Los números $0, b, x_1$ y x_2 (que forman una progresión aritmética por hipótesis) pueden ser ordenados de dos maneras:

· Los números x_1 y x_2 son interiores al intervalo $[0, b]$. Entonces, (con una elección apropiada de los subíndices), $x_1 = b/3, x_2 = 2b/3$, luego

$$b = f(0) = a \left(-\frac{b}{3} \right) \left(-\frac{2b}{3} \right) = \frac{2ab^2}{9} \implies b = \frac{9}{2a}$$

y

$$f(x) = a \left(x - \frac{3}{2a} \right) \left(x - \frac{3}{a} \right) = ax^2 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{2a}.$$

· Los números 0 y b son interiores al intervalo $[x_1, x_2]$. Entonces (eligiendo apropiadamente los subíndices), $x_1 = -b, x_2 = 2b$, de donde

$$b = f(0) = ab(-2b) = -2ab^2 \implies b = -\frac{1}{2a}$$

y

$$f(x) = a \left(x - \frac{1}{2a} \right) \left(x + \frac{1}{a} \right) = ax^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2a}.$$

PROBLEMAS DE NIVEL MEDIO Y DE OLIMPIADAS (22)

Algunos problemas propuestos en las Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Educación Secundaria de Baleares, Cataluña y Valencia, en 2005.

Agradecemos a los Prof. José Luis Díaz-Barrero y Miguel Amengual Covas la gentileza de habernos proporcionado los enunciados y autorizado su publicación.

22.1: Valencia 2005

Sea $\alpha = \frac{2004}{2005}$. Demostrar que para cualquier entero positivo n se verifica la desigualdad

$$\frac{1}{2005} \left[\sqrt{1 - (1 - \alpha)^2} + \sqrt{1 - (1 - \alpha^2)^2} + \dots + \sqrt{1 - (1 - \alpha^n)^2} \right] < \frac{\pi}{4}.$$

22.2: Barcelona 2005

Sea la familia de elipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que pasan por el punto $(1, 1)$. Se pide:

- La elipse de la familia de área mínima.
- Las elipses de la familia que generan un volumen mínimo al girar alrededor del eje de abscisas.

22.3: Barcelona 2005

Por el baricentro del triángulo equilátero ABC (y en su mismo plano) se traza una recta r . Demostrar que la suma de los cuadrados de las distancias de los tres vértices del triángulo a la recta no depende de la elección de ésta.

22.4: Baleares 2005

Sean P, Q, R, S los respectivos puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA del cuadrilátero convexo ABCD.

Sea O el punto de intersección de PR y QS.

Si $OA = OC$ y $OB = OD$, demostrar que ABCD es un paralelogramo.

22.5: Baleares 2005

Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación $x^2 - px + 1 = 0$, donde p es un número natural mayor o igual que 3.

Para cada número natural $n \geq 0$ definimos $a_n = x_1^n + x_2^n$.

Demostrar que a_n es entero para cada valor de n y que a_n y a_{n+1} son primos entre sí.

PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES (#22)

Cinco problemas del libro *Mathematical Circles (Russian experience)*, por Fomin, Genkin e Itenberg. AMS 1996

Este excelente libro puede ser utilizado con provecho en Seminarios de problemas para alumnos y profesores. He aquí cinco muestras de los problemas que incluye.

22.1: Tres números primos, p, q y r , todos ellos mayores que 3, están en progresión aritmética de diferencia d . Demostrar que d es divisible por 6.

22.2: En un cierto planeta, más de la mitad de la superficie es tierra seca. Demostrar que sus habitantes pueden perforar un túnel que pase por el centro del planeta, empezando y terminando en tierra seca.

22.3: Hallar un punto interior a un cuadrilátero convexo tal que la suma de las distancias del punto a los vértices sea mínima.

22.4: Se supone que $a + d$, $(b - 1)c$, y $ab - a + c$ son divisibles por el entero positivo m . Demostrar que

$$ab^n + cn + d$$

es divisible por m .

22.5: La suma de las cifras de un cuadrado perfecto, ¿puede ser igual a 1970?

Problema 101 * (propuesto por Abderrahim Ouardini, Burdeos, Francia)

Se considera un triángulo ABC cuyos lados están ordenados de la manera siguiente:

$$AB \leq AC \leq BC$$

Sea I el centro de su círculo inscrito, y T el punto de tangencia del círculo inscrito con el lado AC . El círculo circunscrito al triángulo AIC vuelve a cortar a la recta IT en J .

Demostrar la equivalencia de las dos proposiciones siguientes:

i) La altura desde B (en el triángulo ABC) es igual a TJ .

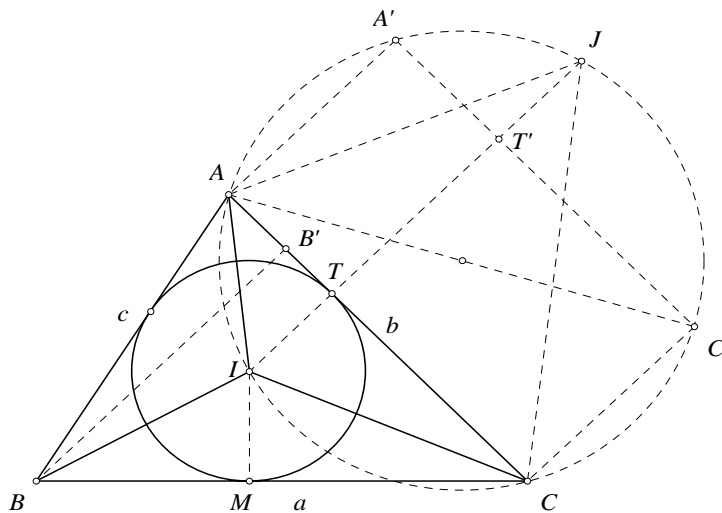
ii) AB, AC y BC están en progresión aritmética.

Solución:

Pongamos como es habitual a, b, c para los lados opuestos a A, B , y C respectivamente, r para el inradio, p para el semiperímetro y $[XYZ]$ el área del triángulo de vértices X, Y, Z .

Con esta notación la proposición i) puede formularse $BB' = TJ$ o bien $[ABC] = [ACJ]$ y la proposición ii) puede formularse de modo equivalente como $2p = 3b$.

Tenemos que probar $BB' = TJ \Leftrightarrow 2p = 3b$.



Primero vamos a calcular TJ en función de elementos del triángulo ABC .

Claramente se tiene $\angle ACJ = 90^\circ - \frac{A}{2}$, $\angle CAJ = 90^\circ - \frac{C}{2}$

Trazamos las perpendiculares a AC por A y C que cortan de nuevo al circuncírculo en A' y C' respectivamente determinando el rectángulo $ACA'C'$ inscrito.

Entonces

$$\angle AC' = \angle CAJ - \angle A'AJ = 90^\circ - \frac{C}{2} - \angle A'AJ = 90^\circ - \frac{C}{2} - \frac{A}{2} = \frac{B}{2}.$$

Como los triángulos IBM y $C'AC$ son semejantes:

$$\frac{C'C}{AC} = \frac{r}{AM} \Leftrightarrow CC' = r \frac{AC}{p-b},$$

y de ahí que

$$TJ = TT' + T'J = CC' + r = r \frac{b}{p-b} + r = r \left(\frac{b}{p-b} + 1 \right) = \frac{pr}{p-b}$$

pero $pr = \frac{1}{2}b \cdot BB'$ (ambas expresiones son el área de ABC) y nos queda finalmente

$$TJ = \frac{b \cdot BB'}{2(p-r)}$$

Supongamos ahora que se cumple i), es decir $BB' = TJ$; entonces la expresión anterior queda

$$\frac{b}{2(p-b)} = 1 \Leftrightarrow 2p - 2b = b \Leftrightarrow b = \frac{2p}{3}$$

y queda probada la equivalencia de ambas proposiciones.

Nota.. Como la proposición ii) es claramente invariante por semejanza, los triángulos cuyos lados estén en progresión aritmética tienen que poder ser caracterizados en términos de sus ángulos.

En efecto,

$$\left. \begin{array}{l} TJ = AJ \cos \frac{C}{2} \\ TJ = BB' = a \operatorname{sen} C = 2a \operatorname{sen} \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow AJ = 2a \operatorname{sen} \frac{C}{2}$$

de modo análogo $CJ = 2c \operatorname{sen} \frac{A}{2}$ y el área de ACJ vale

$$[ACJ] = \frac{1}{2} AJ \cdot CJ \cdot \operatorname{sen} \left(90 - \frac{B}{2} \right) = 2ac \operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2} \cos \frac{B}{2}$$

por otra parte

$$[ABC] = \frac{1}{2} ac \operatorname{sen} B = ac \operatorname{sen} \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$$

igualando ambas áreas obtenemos la relación buscada en función sólo de los ángulos

$$\operatorname{sen} \frac{B}{2} = 2 \operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2}$$

Podría enunciarse como un nuevo problema:

Dado un triángulo ABC con $AB \leq AC \leq BC$ probar que los lados están en progresión aritmética si y sólo si

$$\operatorname{sen} \frac{B}{2} = 2 \operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2}$$

Problema 102.

(propuesto por Doru Popescu Anastasiu y Miguel Amengual Covas, Mallorca, España)

Sea ABC un triángulo y D un punto sobre BC . Probar que la relación

$$AD^2 = AB \cdot AC \quad (1)$$

no puede verificarse si AD es altura o bisectriz interior.

Si AD es mediana, probar que existen infinitos triángulos que cumplen (1).

(*) ¿Para qué triángulos ABC y para qué puntos D pertenecientes a BC se verifica (1)?

Solución. (pondremos como habitual a, b, c para los lados opuestos a A, B y C respectivamente).

Si AD es la altura, obviamente $AD \leq AB$ y $AD \leq AC$ y por tanto $AD^2 \leq AB \cdot AC$ excepto si fueran válidas las dos igualdades simultáneamente y en ese caso el segundo miembro es nulo sin serlo el primero.

Si AD es la bisectriz interior, es sabido que $AD^2 = bc \left(1 - \left(\frac{a}{b+c} \right)^2 \right)$; y siendo $a \leq b+c$ resulta

$$AD^2 \leq bc,$$

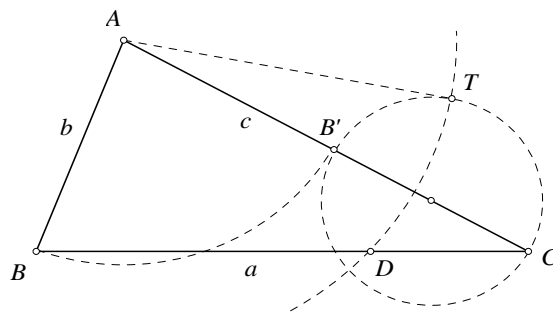
valiendo la igualdad cuando $a = b+c$ y en ese caso $AD = 0$ mientras que $b \cdot c \neq 0$, luego nunca es válida la igualdad (1).

Si AD es la mediana sabemos que $AD^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ y la igualdad (1) queda

$$\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = bc \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} = (b-c)^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{2}(b-c)$$

y esta última relación la cumple cualquier triángulos no isósceles.

Para la última cuestión vamos a construir el punto D con regla y compás a partir de una triángulo ABC dado.



Supongamos que $b < c$, entonces la circunferencia de centro A y radio b corta a AC en B' .

La tangente desde A a la circunferencia de diámetro $B'C$ determina T de modo que $AT^2 = AB \cdot AC$.

Sólo queda buscar la intersección con BC de la circunferencia de centro A y radio AT .

Como $b < \sqrt{bc} < c$ queda garantizada la existencia de D .

Si $b = c$, la circunferencia de diámetro $B'C$ se reduce a un punto y $T = C$ de modo que (1) se verifica para $D = B$ o $D = C$ de modo trivial.

Si consideramos el lado BC como un segmento cerrado todos los triángulos admiten un punto D perteneciente a BC que verifica (1).

Si BC es un segmento abierto hay que excluir los triángulos que cumplan $b = c$.

Problema 103. Propuesto por José Luis Díaz Barrero. Barcelona. España. **Solución de J. Álvarez Lobo.**

Sean a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 2$) n números reales mayores o iguales que 1. Pruébese que

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \right) \left(\prod_{k=1}^n (1+a_k) \right) \geq 2n^2.$$



La desigualdad se verifica para $n = 2$. En efecto, sean $x = a_1, y = a_2$. Definamos la función

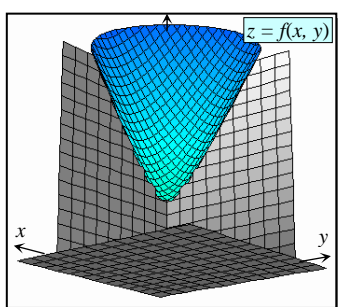
$$f(x, y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) (1+x)(1+y); \quad x, y \in [1, \rightarrow).$$

Obviamente,

$$f(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n=2} \frac{1}{a_k} \right) \left(\prod_{k=1}^{n=2} (1+a_k) \right).$$

Veamos que $f(x, y) \geq 2n^2 = 8$.

Puesto que f es derivable en todo su dominio de definición, los únicos puntos críticos, si existen, son los puntos estacionarios (extremos locales o relativos); utilizaremos el vector gradiente de f para detectar éstos. Se tiene:



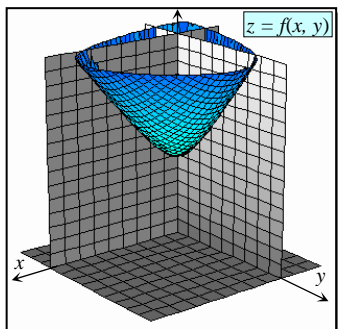
$$\left(\frac{(x^2 - y)(y+1)}{x^2 y}, \frac{(y^2 - x)(x+1)}{x y^2} \right),$$

luego,

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Además,

$$f_x(1, 1)f_y(1, 1) - f_{xy}^2(1, 1) = \frac{2(y+1)}{x^3} \cdot \frac{2(x+1)}{y^3} - \left(-\frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2} \right) \Bigg|_{x=1, y=1} = 12 > 0,$$



por lo que el punto $(1, 1)$ es un mínimo local, que además es un mínimo global (absoluto) pues $(1, 1)$ es un punto frontera, y en ésta es el único punto crítico. En efecto, la frontera de f son las trazas de la superficie $f(x, y)$ sobre los planos $y = 1$ y $x = 1$, es decir las líneas de ecuación

$$f(x, 1) = \left(\frac{1}{x} + 1 \right) (1+x)(1+1) = 2 \left(x + \frac{1}{x} + 2 \right); \quad x \in [1, \rightarrow),$$

$$f(1, y) = \left(1 + \frac{1}{y} \right) (1+1)(1+y) = 2 \left(y + \frac{1}{y} + 2 \right); \quad y \in [1, \rightarrow),$$

y se tiene:

$$f'(x, 1) = 2 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 1, \text{ si } x \in [1, \rightarrow),$$

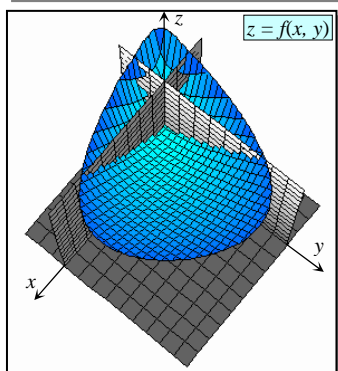
$$f'(1, y) = 2 \left(1 - \frac{1}{y^2} \right) = 0 \Leftrightarrow y = 1, \text{ si } y \in [1, \rightarrow).$$

En consecuencia,

$$f(x, y) \geq f(1, 1) = 8 = 2n^2, \text{ para } n = 2.$$

Es decir, la desigualdad objeto de demostración se cumple para el primer valor de n para el que ha sido establecida.

Mediante **inducción completa** sobre n probaremos que la desigualdad se verifica para cualquier $n \geq 2$.



Hipótesis de inducción:

$$\left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k}\right) \left(\prod_{k=1}^m (1+a_k)\right) \geq 2m^2, \forall a_k \in \mathbf{R} : a_k \geq 1.$$

Se ha de probar, utilizando la hipótesis de inducción, que

$$\left(\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{a_k}\right) \left(\prod_{k=1}^{m+1} (1+a_k)\right) \geq 2(m+1)^2.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{a_k}\right) \left(\prod_{k=1}^{m+1} (1+a_k)\right) &= \left(\frac{1}{a_{m+1}} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k}\right) \left((1+a_{m+1}) \prod_{k=1}^m (1+a_k)\right) = \\ &= \frac{1+a_{m+1}}{a_{m+1}} \prod_{k=1}^m (1+a_k) + (1+a_{m+1}) \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k}\right) \left(\prod_{k=1}^m (1+a_k)\right) \stackrel{\textcircled{1}}{\geq} \\ &\geq \prod_{k=1}^m (1+a_k) + 2 \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k}\right) \left(\prod_{k=1}^m (1+a_k)\right) \stackrel{\textcircled{2}}{\geq} \\ &\geq \prod_{k=1}^m (1+a_k) + 2 \cdot 2m^2 = 2m^2 + (2m)m + \prod_{k=1}^m (1+a_k) \stackrel{\textcircled{3}}{\geq} \\ &\geq 2m^2 + 4m + \prod_{k=1}^m (1+a_k) \stackrel{\textcircled{4}}{\geq} \\ &\geq 2m^2 + 4m + 2 = 2(m^2 + 2m + 1) = 2(m+1)^2. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k}\right) \left(\prod_{k=1}^m (1+a_k)\right) \geq 2m^2 \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{a_k}\right) \left(\prod_{k=1}^{m+1} (1+a_k)\right) \geq 2(m+1)^2,$$

y de aquí que

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}\right) \left(\prod_{k=1}^n (1+a_k)\right) \geq 2n^2, \forall n \in \mathbf{N} : n \geq 2, \forall a_k \in \mathbf{R} : a_k \geq 1.$$

Observaciones. En la anterior cadena de desigualdades se ha utilizado:

$$\textcircled{1} a_{m+1} \geq 1 > 0 \Rightarrow \frac{1+a_{m+1}}{a_{m+1}} \geq 1, 1+a_{m+1} \geq 2.$$

$$\textcircled{2} \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k}\right) \left(\prod_{k=1}^m (1+a_k)\right) \geq 2m^2 \text{ (hipótesis de inducción).}$$

$$\textcircled{3} m \geq 2.$$

$$\textcircled{4} a_k \geq 1 \Rightarrow 1+a_k \geq 2, \forall k \in \mathbf{N} : k \geq 2.$$

Generalización. La desigualdad propuesta admite la siguiente generalización (demostración análoga):

$$\square \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}\right) \left(\prod_{k=1}^n (\lambda + a_k)\right) \geq 2\lambda n^2, \forall \lambda, a_k \in \mathbf{R} : \lambda, a_k \geq 1, \forall n \in \mathbf{N} : n \geq 2.$$

Formas equivalentes. Por simples cambios de variable en la anterior, se deducen las desigualdades:

$$\square \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}\right) \left(\prod_{k=1}^n (\lambda - a_k)\right) \leq -2\lambda n^2, \forall \lambda, a_k \in \mathbf{R} : \lambda \geq 1, a_k \leq -1, \forall n \in \mathbf{N} : n \geq 2.$$

$$\square \left(\sum_{k=1}^n a_k\right) \left(\prod_{k=1}^n \left(\lambda + \frac{1}{a_k}\right)\right) \geq 2\lambda n^2, \forall \lambda, a_k \in \mathbf{R} : \lambda \geq 1, 0 < a_k \leq 1, \forall n \in \mathbf{N} : n \geq 2.$$

$$\square \left(\sum_{k=1}^n a_k\right) \left(\prod_{k=1}^n \left(\lambda - \frac{1}{a_k}\right)\right) \leq -2\lambda n^2, \forall \lambda, a_k \in \mathbf{R} : \lambda \geq 1, -1 \leq a_k < 0, \forall n \in \mathbf{N} : n \geq 2.$$



Problema 104

(propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España)
 Solución de Marcos Martinelli, Brasil

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n e^{\frac{1}{n+2005k}} - n \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2005k)^j j!} - n \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \left[1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2005k)^j j!} \right] - n \right\} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2005k)^j j!} \right]. \end{aligned}$$

Calculemos agora o seguinte limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+2005k)^j}$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Para isso

considere a seguinte função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{(1+2005x)^j}$. Podemos

observar que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1+2005\frac{k}{n}\right)^j} \cdot \frac{1}{n} \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+2005x)^j} dx$ e ainda notamos que

$\sum_{k=0}^n \frac{1}{\left(1+2005\frac{k}{n}\right)^j} \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{\left(1+2005\frac{n}{n}\right)^j} \cdot \frac{1}{n} \geq \int_0^1 \frac{1}{(1+2005x)^j} dx$ e que, portanto:

$$\frac{1}{\left(1+2005\frac{n}{n}\right)^j} \cdot \frac{1}{n} + \int_0^1 \frac{1}{(1+2005x)^j} dx - \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1+2005\frac{k}{n}\right)^j} \cdot \frac{1}{n} \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+2005x)^j} dx \rightarrow$$

$$\frac{n}{n^j} \cdot \left[\frac{1}{\left(1+2005\frac{n}{n}\right)^j} \cdot \frac{1}{n} + \int_0^1 \frac{1}{(1+2005x)^j} dx - \frac{1}{n} \right] \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+2005k)^j} \leq \frac{n}{n^j} \int_0^1 \frac{1}{(1+2005x)^j} dx \rightarrow$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+2005k)^j} = \int_0^1 \frac{1}{(1+2005x)^j} dx$ se $j=1$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+2005k)^j} = 0$ se $j \geq 2$.

Logo o limite procurado vale $\int_0^1 \frac{1}{(1+2005x)} dx = \frac{\ln(2006)}{2005}$.

PROBLEMAS PROPUESTOS 106-110

PROBLEMA 106 (propuesto por José Luis Díaz-Barrero, Barcelona, España)

Sean a, b, c tres números positivos. Probar que

$$\sum_{cíclica} \left(\frac{1}{a+b} \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}} \right) \geq \frac{3\sqrt{3}}{1 + \sqrt[3]{abc}}.$$

PROBLEMA 107 * (propuesto por Jorge Enrique Espinoza Guevara, Lima, Perú, y corregido el enunciado ligeramente por el editor)

Desde un punto exterior P a una elipse se trazan dos secantes, PAB y PCD (A,B,C y D son los puntos de intersección de las secantes con la elipse. Las rectas CA y DB se cortan en Q; desde Q se trazan las tangentes a la elipse QE y QF (E,F puntos de tangencia).

Demostrar que P, E y F están alineados.

PROBLEMA 108 * (propuesto por Marcos Martinelli, Brasil)

Sean A, B y C matrices reales conmutativas de orden 2. Demostrar que se verifica la desigualdad

$$\det [(A + B + C)(A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC)] \geq 0.$$

PROBLEMA 109 (propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España)

Con las notaciones habituales para el triángulo (r , inradio; R circunradio; p semiperímetro), demostrar que

$$12pr \leq 2(p^2 + r^2 + 4Rr) \leq 3p^2.$$

PROBLEMA 110 (propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España)

Con las notaciones habituales para el triángulo (r , inradio; R circunradio; p semiperímetro), demostrar que

$$6\sqrt{3}r \leq 2p \leq 3\sqrt{3}R.$$

¿Cuándo se verifica la igualdad?

DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS 22

Algunas citas del libro *Twenty years before the blackboard*, por M. Stauben y D. Sandford (MAA 1998)

Un comentario de J.L. Kelley (autor del famoso libro de texto de Topología de los años 60) sobre su experiencia en la Universidad:

Seguí tres cursos sobre educación matemática durante mis tres primeros semestres en UCLA para preparar una credencial. Los cursos fueron bastante malos y además la calificación fué injusta: yo escribí un ensayo sobre Filosofía de la Educación y obtuve una B; mi amigo Wes Hicks, cuya escritura manuscrita es mejor que la mía, lo copió en el siguiente semestre y obtuvo una B+; y nuestro común amigo Dick Gorman lo copió a máquina el semestre siguiente y obtuvo una A.

(Fuente: J.L. Kelley, Peter Duren ed., vol. 3, *A Century of Mathematics in America*, AMS 1989, pp. 474-475)

Una respuesta de un estudiante:

Profesor: *Intentaré ayudarte a que lo comprendas*

Estudiante: *Por favor, Profesor, ¿porque no me ayuda a recordar las reglas para aprobar el examen?*

Un viejo chiste

¿Cuántos psicólogos hacen falta para cambiar una bombilla?

Uno, pero la bombilla debe realmente querer ser cambiada.

¿Cuántos matemáticos hacen falta para cambiar una bombilla?

Ninguno, lo que hará el matemático es darle la bombilla al psicólogo, reduciendo así el problema a un caso previamente resuelto.

COMENTARIO DE PÁGINAS WEB 22

La página de Adrian Oldknow

<http://www.adrianoldknow.org.uk>

El editor conoció al Prof. retirado Adrian Oldknow durante el verano de 2005, en el Congreso anual de la Sociedad belga de profesores de matemáticas de expresión francesa, celebrado a finales de agosto en Tournai, donde Oldknow era uno de los conferenciantes invitados. Su disertación versó sobre el programa CABRI en 3D, y su aplicación en clase. Tuvo un enorme éxito, culminado cuando dibujó en la pantalla, en cuestión de segundos, el esquema de la magnífica catedral de Tournai, que habíamos visitado el día anterior.

En su página web, lógicamente, hay muchas más cosas, y se recomienda con énfasis visitarla. Nadie quedará defraudado.

F.Bellot

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoidm/>

Edita:

