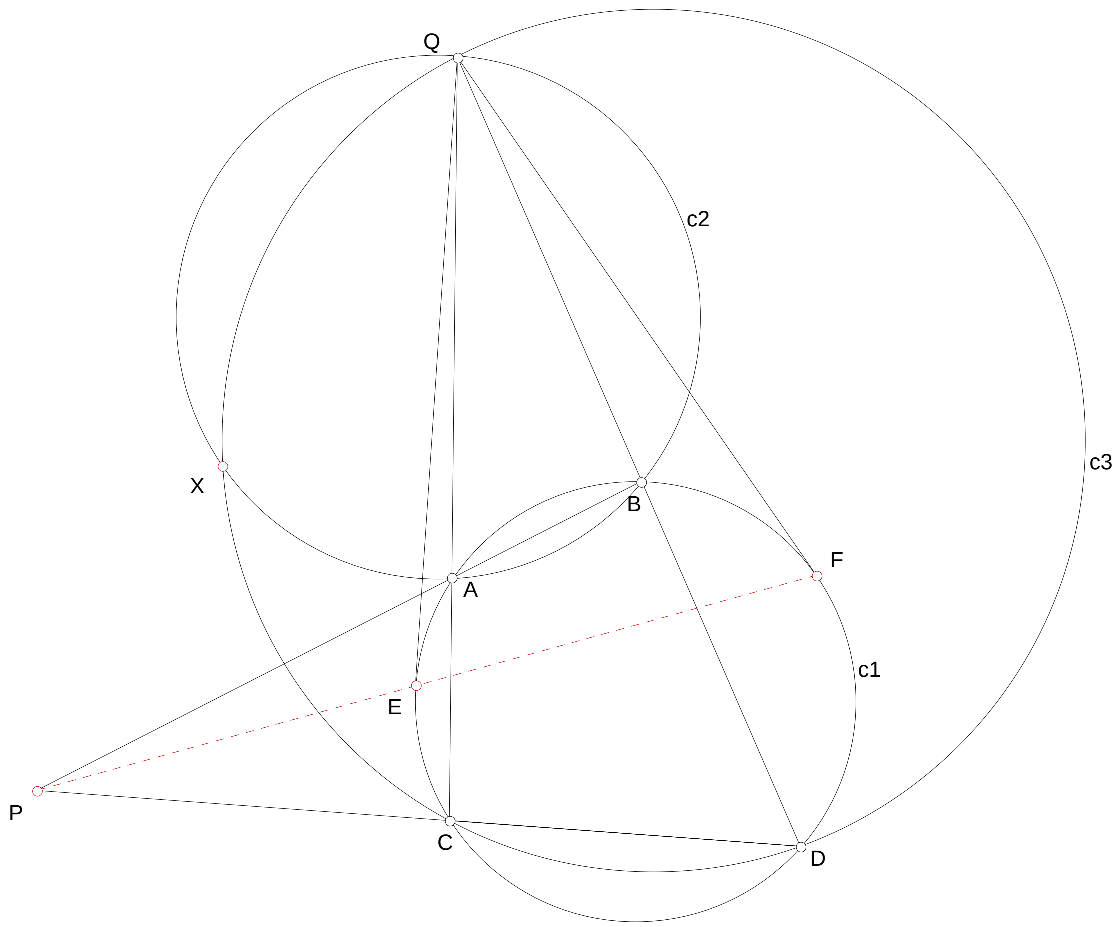
Problema 107 **Toro (Las Tunas, Cuba)**

Vamos a analizar el caso de la circunferencia, ya que los demás casos se reducen a este a través de la debida proyección. Considérese la figura:



Tomemos una inversión con centro en Q y radio QE, A y C se transforman uno en el otro porque $QE^2 = QA*QC$. Análogamente con B y D. Ahora la recta AB se Transforma en la circunferencia c3 ya que contiene a Q, C y D. Análogamente la recta CD se transforma en c2 que contiene a Q, A y B. Sea X la intersección de c2 y c3; entonces X es la imagen de P en dicha inversión. Ahora $QX*QP = QE^2 = QA*QC$, esto prueba que A, C, P y X son concíclicos. Tomemos ahora una nueva inversión en el pto P y que me transforme c1 en sí misma. Como $QE^2 = QX*QP$; la circunferencia que pasa por P, X y E es tangente a QE en E y por consiguiente es tangente a c1 en E. A través de la última inversión la circunferencia circunscrita al triángulo PXE se transforma en una recta que pasa por Q es tangente a c1 (que no se mueve); esta recta es QF y por tanto F y E se transforman uno en el otro en inversión descrita, lo que completa la demostración.

<u>Nota:</u> Q es la imagen de X en la última inversión porque B es la imagen de A y $PA*PB = PX*PQ$. (Potencia del pto P.)

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI