Problema 109.
(propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España)
Con las notaciones habituales para el triángulo (r; inradio; R circunradio; p semiperímetro), demostrar que

$$12pr \leq 2\left(p^2 + r^2 + 4Rr\right) \leq 3p^2$$

Solución.
Vamos a "ajustar" ambas cotas probando

$$8\sqrt{3}pr \leq 2\left(p^2 + r^2 + 4Rr\right) \leq \frac{8}{3}p^2. \quad (1)$$

Como $8\sqrt{3} > 12$ y $\frac{8}{3} < 3$, demostrando la desigualdad anterior habremos probado el enunciado y además las nuevas cotas no pueden mejorarse pues en ambas se verifica la igualdad cuando el triángulo es equilátero. Comenzaremos con la desigualdad de la izquierda que una vez simplificada puede ponerse:

$$p^2 + r^2 + 4Rr \geq 4\sqrt{3}pr \quad (2)$$

Para probar (2) usaremos dos desigualdades:
$R \geq 2r$ (la conocida desigualdad de Euler) y $p \geq 3\sqrt{3}r$ (menos conocida pero de fácil demostración aplicando la desigualdad de las medias a los tres números positivos $p-a,\ p-b,\ p-c$. Está demostrada con detalle en el problema 110).
Para nuestro propósito las pondremos en la forma

$$\frac{R}{r} \geq 2 \quad (*) \qquad \frac{p}{r} \geq 3\sqrt{3} \quad (**)$$

ambas con igualdad si y sólo si el triángulo es equilátero.
En la desigualdad (2) pasando todo al primer miembro, dividiendo por el número positivo r^2 y llamando $t = \frac{p}{r}$ toma la forma:

$$t^2 - 4\sqrt{3}t + 4\frac{R}{r} + 1 \geq 0.$$

Por (**) basta comprobar que el trinomio toma valores positivos para $t \geq 3\sqrt{3}$.
Como el mínimo se alcanza para $t = 2\sqrt{3}$, estamos en la rama creciente y sólo hay que comprobar la validez de la desigualdad en $t = 3\sqrt{3}$. Sustituyendo queda:

$$27 - 36 + 4\frac{R}{r} + 1 = -9 + 4\frac{R}{r} + 1 \geq 0$$

desigualdad cierta por (*).
Para la desigualdad de la derecha veamos primero que $p^2 + r^2 + 4Rr = ab + ac + bc$ donde a, b y c son las medidas de los lados del triángulo como es habitual.
En efecto, si llamamos S al área y por la fórmula de Heron tenemos

$$S^2 = p^2r^2 = p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right) \Leftrightarrow pr^2 = \left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)$$

operando la última resulta

$$pr^2 = p^3 - (a+b+c)\,p^2 + (ab+ac+bc)\,p - abc$$

es sabido que $a+b+c=2p$ y $abc=4Rrp$, sustituyendo y despejando el paréntesis queda

$$ab+ac+bc = p^2 + r^2 + 4Rr$$

La desigualdad de la derecha queda ahora:

$$2(ab+ac+bc) \le 3p^2$$

se demuestra teniendo en cuenta que

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \ge 0 \Leftrightarrow 2ab \le a^2 + b^2$$

escribiendo las dos expresiones análogas permutando vértices, sumando y dividiendo por 2 queda

$$ab+ac+bc \le a^2 + b^2 + c^2$$

(con igualdad cuando $a = b = c$)
y sumando a los dos miembros $2(ab+ac+bc)$ resulta finalmente

$$3(ab+ac+bc) \le (a+b+c)^2 = 4p^2$$

sólo queda dividir por 3 y multiplicar por 2 para obtener

$$2(p^2 + r^2 + 4Rr) = 2(ab+ac+bc) \le \frac{8}{3}p^2$$

Todas las desigualdades que hemos manejado devienen en igualdades si y sólo si el triángulo es equilátero.
También puede comprobarse por simple cálculo directo que en un triángulo equilátero de lado l, los tres términos de (1) valen $6l^2$.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI