Problema 110

Con las notaciones habituales para el triángulo (r, inradio; R, circunradio, p, semiperímetro) demostrar que

$$6\sqrt{3}\,r \le 2p \le 3\sqrt{3}\,R$$

Solución de Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España.

El área de un triángulo es pr y también $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Herón); se sigue que

$$pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$
$$pr^2 = (p-a)(p-b)(p-c)$$

y, por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, resulta

$$p = (p-a)+(p-b)+(p-c) \ge 3\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} = 3\sqrt[3]{pr^2}$$

equivalente a

$$3\sqrt{3}\,r \le p \qquad (1)$$

Hacemos servir ahora el teorema de los senos y aplicamos la desigualdad de Jensen a la función $f(x)=\sin x$ que es estrictamente convexa en $(0,\pi)$ para obtener

$$\begin{aligned} 2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C} &= \frac{2p}{\sin A+\sin B+\sin C} \\ &\ge \frac{2p}{3\sin\frac{A+B+C}{3}} \\ &= \frac{2p}{3\sin\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{2p}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \end{aligned}$$

de donde

$$p \le \frac{3\sqrt{3}}{2}R \qquad (2)$$

De (1) y (2) resulta $3\sqrt{3}\,r \le p \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}R$ que es equivalente a la propuesta. Se verifican las igualdades si y sólo si $a=b=c$, esto es, si y sólo si el triángulo es equilátero.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI