

Problema 5 de la VII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (nº 20 de la Revista Escolar de la OIM):

En un triángulo acutángulo ABC , sean H su ortocentro y M el punto medio del lado AC . Por M se traza una recta L paralela a la bisectriz del ángulo AHC . Demuestre que la recta L divide al triángulo ABC en dos partes que tienen el mismo perímetro.

Solución:

Como ABC es acutángulo, H es interior a ABC ; además, por ser $AH \perp BC$ y π la suma de los ángulos interiores de AH_aC , resulta que $H_aAC = \frac{\pi}{2} - C$ y análogamente $ACH = \frac{\pi}{2} - A$.

Y, al ser π la suma de los ángulos interiores de AHC , se tiene que $CHA = A + C$, o bien, $CHA = \pi - B$, de donde el ángulo formado por la bisectriz del ángulo AHC y la altura CH , que coincide por el formado por L y CH , es $\frac{\pi - B}{2}$.

Además, L puede cortar al segmento BC o al segmento AB .

Caso 1: L corta al segmento BC ($c < a$):

Si L corta al segmento BC en N y a CH en D , el ángulo $NDC = \pi - \frac{\pi - B}{2}$, con lo cual en NCD se conocen dos ángulos, siendo por lo tanto el tercero $CND = \frac{B}{2}$. Esto significa que el formado por L y BC coincide con el formado por la bisectriz interior, BB_a , de B y el lado BC , teniendo por tanto NCM y BCB_a el mismo ángulo en los vértices N y B . Pero el ángulo en el vértice C es común, con lo cual NCM y BCB_a poseen los tres ángulos respectivamente iguales, siendo por tanto semejantes.

Entonces sus lados son respectivamente proporcionales, con lo cual $\frac{NC}{BC} = \frac{CM}{CB_a}$, o sea,

$$NC = \frac{b/2}{CB_a} a. \text{ Aplicando el teorema de los senos en } BCB_a, \text{ resulta que } \frac{\sin\left(A + \frac{B}{2}\right)}{\sin \frac{B}{2}} = \frac{a}{CB_a}, \text{ de}$$

$$\text{donde } NC = \frac{b}{2} \frac{a}{CB_a} = \frac{b}{2} \frac{\sin\left(A + \frac{B}{2}\right)}{\sin \frac{B}{2}}. \text{ La igualdad a demostrar es, entonces:}$$

$$\begin{aligned} AB + BN + NM + MA &= MN + NC + CM \Leftrightarrow AB + BN + MA = NC + CM \Leftrightarrow AB + BN = NC \\ \Leftrightarrow AB + BC &= 2NC \Leftrightarrow \frac{c+a}{2} = \frac{b}{2} \frac{\sin\left(A + \frac{B}{2}\right)}{\sin \frac{B}{2}} \Leftrightarrow \frac{c+a}{b} = \frac{\sin\left(A + \frac{B}{2}\right)}{\sin \frac{B}{2}}. \end{aligned}$$

La circunferencia de centro B y radio BA cortará a la prolongación de BC , en el sentido de C hacia B , en un punto X y al lado BC en un punto Y , siendo $XC = XB + BC = c + a$.

Por ser YXA inscrito en $C(B, BA)$, se tiene que

$CXA = YXA = \frac{YBA}{2} = \frac{B}{2}$ y, al ser π la suma de los ángulos interiores de XCA , resulta que

$XAC = \pi - \left(\frac{B}{2} + C\right) = A + \frac{B}{2}$. Aplicando entonces el teorema de los senos en XCA , será

$\frac{XC}{CA} = \frac{\sin XAC}{\sin CXA}$, como se quería probar.

Caso 2: L corta al segmento AB ($a < c$):

La demostración es análoga, cambiando la nomenclatura:

Si L corta al segmento AB en N y a CH en D , ANM tiene los ángulos respectivamente iguales a los de ABB_b , de ahí la semejanza de ambos, con lo cual $\frac{AN}{AB} = \frac{MA}{B_bA}$, o sea,

$AN = \frac{b/2}{B_bA}c$. Aplicando el teorema de los senos en B_bAB , resulta que , de donde

$AN = \frac{b}{2} \frac{\sin \left[\pi - \left(A + \frac{B}{2} \right) \right]}{\sin \frac{B}{2}}$. La igualdad a demostrar es, entonces:

$$AB + NM + MA = NB + BC + CM + MN \Leftrightarrow AN = c - AN + a \Leftrightarrow \frac{c+a}{b} = \frac{\sin \left(A + \frac{B}{2} \right)}{\sin \frac{B}{2}}.$$

La circunferencia de centro B y radio BC cortará a la prolongación de AB , en el sentido de A hacia B , en un punto X y al lado AB en un punto Y , siendo $AX = AB + BX = c + a$.

Por ser CXY inscrito en $C(B, BC)$, se tiene que $CXA = CXY = \frac{CBY}{2} = \frac{B}{2}$ y, al ser π la suma de

los ángulos interiores de XCA , resulta que $ACX = \pi - \left(A + \frac{B}{2} \right)$. Aplicando entonces el teorema de

los senos en AXC , será $\frac{AX}{AC} = \frac{\sin ACX}{\sin CXA}$, como se quería probar.

Caso 3: L es la altura desde B ($a = c$):

En este caso, L coincide, por ser $AB = BC$, con la bisectriz de AHC , con lo cual de $AB = CB$ y $AM = MC$ se deduce que $AB + BM + MA = BC + CM + MB$, como se quería probar.

Nota: El problema consistía en probar la igualdad $(c+a)/b = \sin(A+B/2)/\sin(B/2)$, que forma parte de un grupo de fórmulas llamadas “analogías de Mollweide”.

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoidm/>

Edita:

