

PROBLEMAS DE NIVEL MEDIO Y DE OLIMPIADAS (22)

Problema 22.3 (Barcelona 2005)

Por el baricentro del triángulo equilátero  $ABC$  (y en su mismo plano) se traza una recta  $r$ . Demostrar que la suma de los cuadrados de las distancias de los tres vértices del triángulo a la recta  $r$  no depende de la elección de ésta.

Tres soluciones de Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España.

1. Métrica

Sea  $a$  la longitud del lado del triángulo equilátero  $ABC$  y  $G$  su baricentro.

Sea  $r$  una línea recta situada en el plano de  $\Delta ABC$  que pasa por  $G$  y sean  $AB$  y  $AC$  los lados de  $\Delta ABC$  que son cortados por  $r$ .

Sea  $M$  el punto medio del lado  $BC$  y  $A', B', C', M'$  los respectivos pies de las perpendiculares bajadas desde  $A, B, C, M$  a la recta  $r$ .

Es sabido que

$$\overline{AA'} = \overline{BB'} + \overline{CC'} \quad (1)$$

Obsérvese (Thales) que  $M'$  es el punto medio del segmento  $B'C'$  y que  $GA':GM' = AG:GM = 2$ , de donde  $GA' = 2 \cdot GM'$ .

Se sigue que

$$\begin{aligned} GB' - GM' &= B'M' = M'C' = M'G + GC' , \\ 2 \cdot GM' &= GB' - GC' \end{aligned}$$

y

$$GA' = GB' - GC' \quad (2)$$

El teorema de Pitágoras aplicado a los triángulos  $AGA'$ ,  $BGB'$  y  $CGC'$ , habida cuenta que  $GA = GB = GC = \frac{a}{\sqrt{3}}$ , da inmediatamente

$$AA' = \sqrt{\frac{a^2}{3} - GA'^2}, \quad BB' = \sqrt{\frac{a^2}{3} - GB'^2} \quad \text{y} \quad CC' = \sqrt{\frac{a^2}{3} - GC'^2} .$$

Sustituímos en (1) y, habida cuenta de (2), obtenemos

$$\sqrt{\frac{a^2}{3} - (GB' - GC')^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} - GB'^2} + \sqrt{\frac{a^2}{3} - GC'^2}$$

que, después de elevar al cuadrado dos veces y simplificar, se reduce a

# Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/>

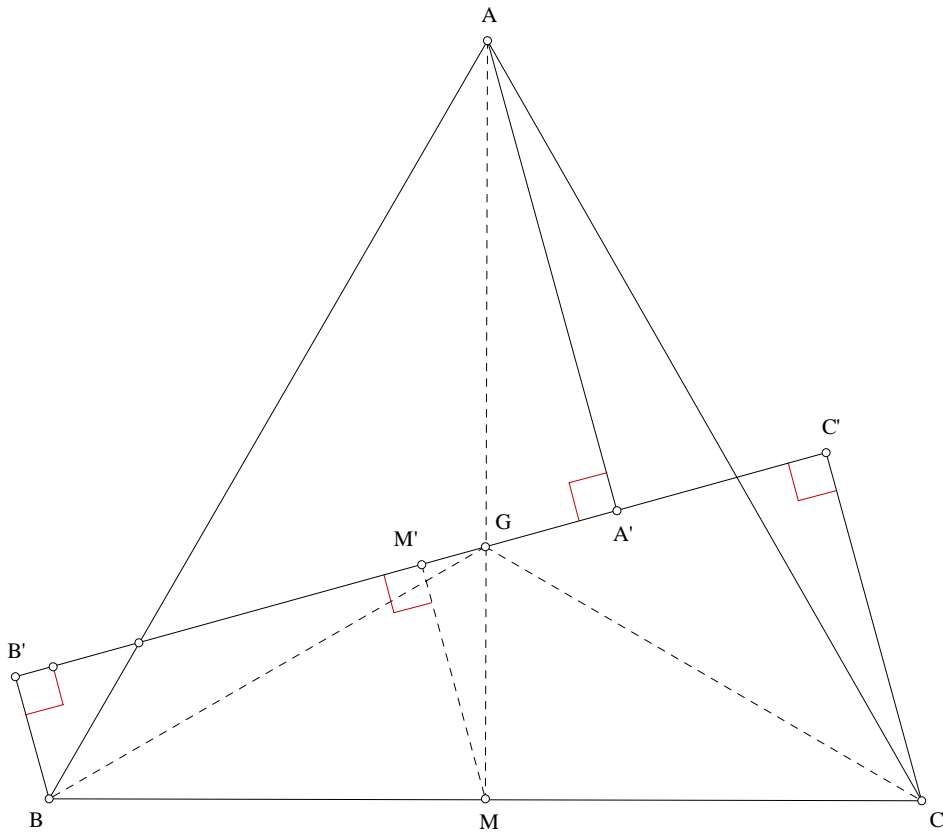
Edita:



$$GB'^2 + GC'^2 - GB' \cdot GC' = \frac{a^2}{4} \quad (3)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 + \overline{CC'}^2 &= (GA^2 - GA'^2) + (GB^2 - GB'^2) + (GC^2 - GC'^2) \\ &= \left(\frac{a^2}{3} - GA'^2\right) + \left(\frac{a^2}{3} - GB'^2\right) + \left(\frac{a^2}{3} - GC'^2\right) \\ &= a^2 - (GA'^2 + GB'^2 + GC'^2) \\ &= a^2 - ((GB' - GC')^2 + GB'^2 + GC'^2) \\ &= a^2 - 2(GB'^2 + GC'^2 - GB' \cdot GC') \\ &= a^2 - 2 \cdot \frac{a^2}{4} \\ &= \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$



## 2. Trigonometría

Sea  $\alpha = \angle BGB'$  y  $\beta = \angle CGC'$ .

Entonces

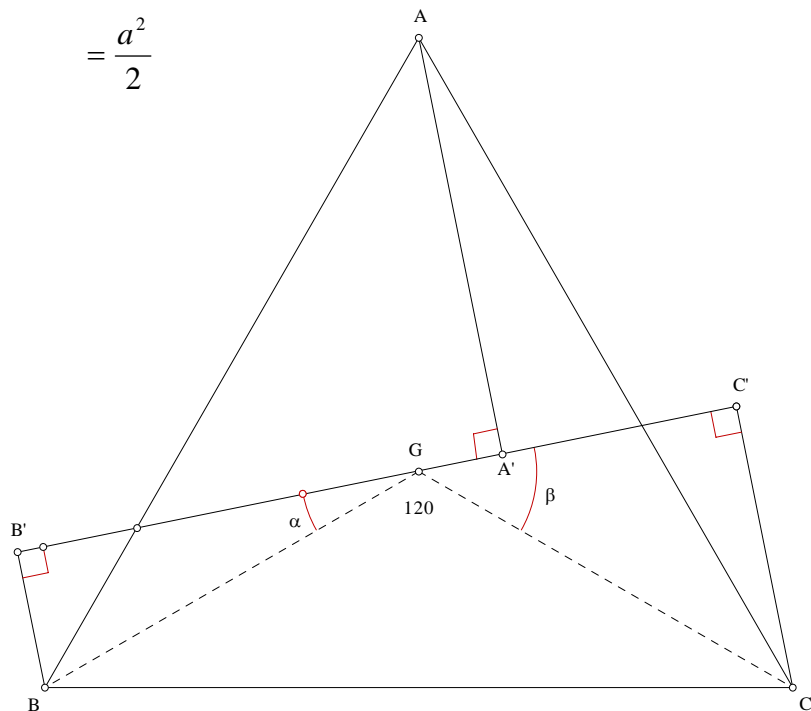
$$AA' = BB' + CC' = GB \cdot \sin \alpha + GC \cdot \sin \beta = \frac{a}{\sqrt{3}} (\sin \alpha + \sin \beta)$$

y, siendo  $\angle BGC = 120^\circ$ , tenemos

$$\alpha + \beta = 60^\circ,$$

con lo que

$$\begin{aligned} \overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 + \overline{CC'}^2 &= \frac{a^2}{3} \left[ (\sin \alpha + \sin \beta)^2 + \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta \right] \\ &= \frac{a^2}{3} \left( 2(\sin \alpha + \sin \beta)^2 - 2 \sin \alpha \sin \beta \right) \\ &= \frac{a^2}{3} \left( 2 \left( 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2 - 2 \sin \alpha \sin \beta \right) \\ &= \frac{a^2}{3} \left( 2 \left( 2 \sin 30^\circ \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2 - 2 \sin \alpha \sin \beta \right) \\ &= \frac{a^2}{3} \left( 2 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} - 2 \sin \alpha \sin \beta \right) \\ &= \frac{a^2}{3} (1 + \cos(\alpha - \beta) - 2 \sin \alpha \sin \beta) \\ &= \frac{a^2}{3} (1 + \cos(\alpha + \beta)) \\ &= \frac{a^2}{3} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$



### 3. Analítica

Si colocamos el origen en el baricentro de  $\triangle ABC$  y tomamos la mediatriz del lado  $BC$  como eje de ordenadas, las coordenadas de los vértices del triángulo resultan

$$A\left(0, \frac{a\sqrt{3}}{3}\right), \quad B\left(\frac{-a}{2}, \frac{-a\sqrt{3}}{6}\right) \quad \text{y} \quad C\left(\frac{a}{2}, \frac{-a\sqrt{3}}{6}\right).$$

Una recta por el baricentro es una recta que pasa por el origen y su ecuación será  $y = mx$ .

Entonces,

$$\overline{AA'} = \frac{\left| -\frac{a\sqrt{3}}{3} \right|}{\sqrt{m^2 + 1}}, \quad \overline{BB'} = \frac{\left| \frac{-ma}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{6} \right|}{\sqrt{m^2 + 1}}, \quad \overline{CC'} = \frac{\left| \frac{ma}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{6} \right|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

y

$$\begin{aligned} \overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 + \overline{CC'}^2 &= \frac{\left(\frac{-a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{-ma}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{ma}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}{m^2 + 1} \\ &= \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

