Problemas de Nivel Medio y de Olimpiadas (Revista Escolar de la OIM, nº 3):

4.2. Los vértices de un cubo en el sistema tridimensional cartesiano de origen O son: $A(1,1,1)$, $A'(-1,-1,-1)$, $B(-1,1,1)$, $B'(1,-1,-1)$, $C(-1,-1,1)$, $C'(1,1,-1)$, $D(1,-1,1)$, $D'(-1,1,-1)$.
El punto O es el centro de la esfera circunscrita al cubo. El punto T no pertencece a esta esfera y $d = OT$. Denotamos $\alpha = \angle ATA'$, $\beta = \angle BTB'$, $\gamma = \angle CTC'$, $\delta = \angle DTD'$.
Probar que $\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\gamma + \tan^2\delta = \dfrac{32d^2}{\left(d^2-3\right)^2}$.

Solución:

Si $T(x,y,z)$, utilizando el teorema del coseno en $AA'T$ resulta, al ser $A' = S_O(A)$ y $OA = \sqrt{3}$:
$AA'^2 = TA^2 + TA'^2 - 2\cdot TA\cdot TA'\cdot\cos\alpha$, es decir,

$$12=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2-2\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2}\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow\ 12 = 2d^2+6-2\sqrt{d^2-2(x+y+z)+3}\sqrt{d^2+2(x+y+z)+3}\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow\ 12 = 2d^2+6-2\sqrt{\left(d^2+3\right)^2-\left[2(x+y+z)\right]^2}\cos\alpha$$

$$\Rightarrow\ \cos^2\alpha = \frac{\left(d^2-3\right)^2}{\left(d^2+3\right)^2-4(x+y+z)^2}$$

$$\Rightarrow\ \tan^2\alpha = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{12d^2-4(x+y+z)^2}{\left(d^2-3\right)^2} \overset{(*)}{=} \frac{8d^2-8(xy+yz+zx)}{\left(d^2-3\right)^2}$$

$^{(*)}$ al ser $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) = d^2+2(xy+yz+zx)$

Análogamente se obtiene que

$$\tan^2\beta = \frac{8d^2-8(-xy+yz-zx)}{\left(d^2-3\right)^2},\ \tan^2\gamma = \frac{8d^2-8(xy-yz-zx)}{\left(d^2-3\right)^2},\ \tan^2\delta = \frac{8d^2-8(-xy-yz+zx)}{\left(d^2-3\right)^2},$$

igualdades que, sumadas, dan el resultado pedido.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI