EL ORTOCENTRO DEL TRIÁNGULO DE FUHRMANN

UNA DEMOSTRACIÓN PURAMENTE SINTÉTICA

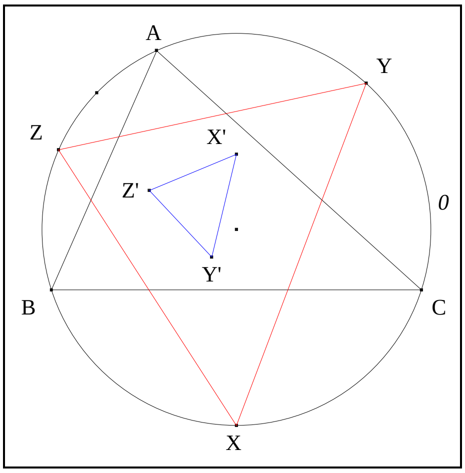
Jean-Louis AYME
Lycée Lislet Geoffroy, 97400 St Denis, Île de la Réunion, France

Resumen. Presentamos una demostración sintética del resultado de Milorad Stevanovic relativo al ortocentro del triángulo de Fuhrmann
Así como una historia de su génesis.

PRESENTACIÓN

1. El triángulo de Fuhrmann

En 1890 apareció por primera vez,, en la página 107 del tratado de Geometría titulado *Synthetische Beweise Planimetrischer Sätze* [1] escrito por el geómetra alemán Wilhelm Furhmann (1833-1904), entonces profesor en el Gymnasium de Königsberg, el célebre triángulo que hoy lleva el nombre de su autor, y que él llamaba en el texto "Das Spiegeldreieck" i.e. "el triángulo reflejado".

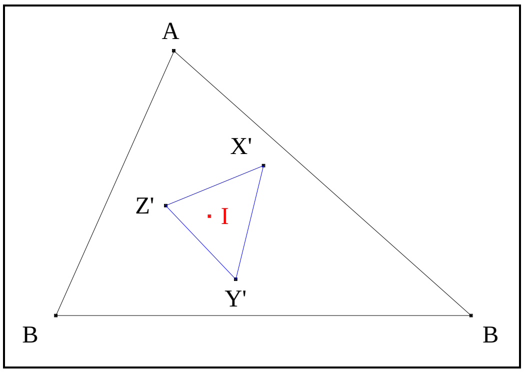


Hipótesis : ABC un triángulo,
0 la circunferencia circunscrita a ABC,
X, Y, Z los puntos medios de los arcos BC, CA, AB que no contienen respectivamente a A, B, C,
y X', Y', Z' los simétricos de X, Y, Z con respecto a (BC), (CA), (AB).

Definición : X'Y'Z' es el triángulo de Fuhrmann de ABC.

2. El resultado de Milorad Stevanovic

El 20 de septiembre de 2002, Milorad Stevanovic [2] comunicaba al grupo *Hyacinthos* [3] el resultado siguiente:



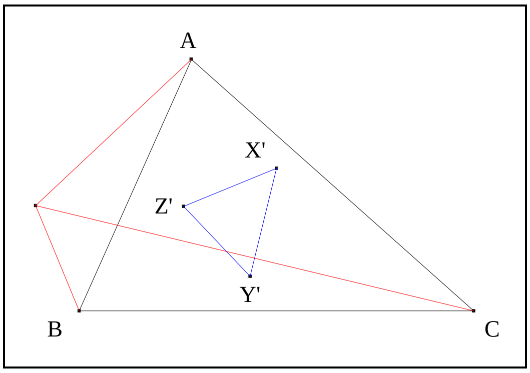
Hipótesis :		ABC	un triángulo,
		I	el incentro de ABC,
	y	X'Y'Z'	el triángulo de Fuhrmann de ABC.

Conclusión :	I es el ortocentro del triángulo X'Y'Z'.

HISTORIA DE LA DEMOSTRACIÓN

1. Las tres perpendiculares de Grinberg

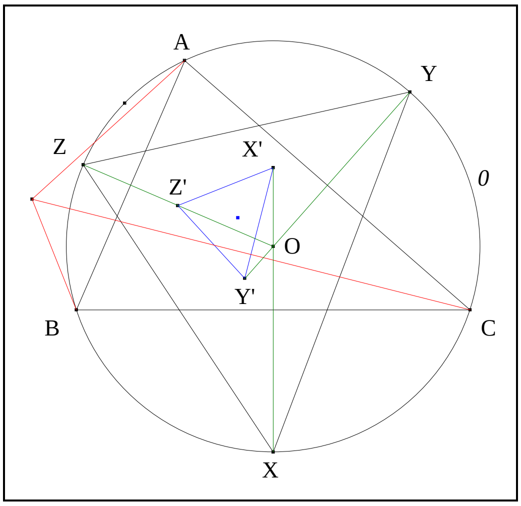
El 9 de enero de 2003, el joven geómetra alemán Darij Grinberg [4] proponía un resultado equivalente al de Stevanovic, a saber, que "los círculos de Euler de un triángulo y de su triángulo de Fuhrmann son concéntricos" y el resultado siguiente, obtenido por ortología (ver Anexo 1) :



Hipótesis :		ABC	un triángulo,
		X'Y'Z'	el triángulo de Fuhrmann de ABC,
	y	*P*a, *P*b, *P*c	las perpendiculares trazadas desde A, B, C sobre (Y'Z'), (Z'X'), (X'Y').

Conclusión :	las rectas *P*a, *P*b y *P*c son concurrentes.

Esquema de la demostración :



- Llamamos *0* el círculo circunscrito a ABC,
  O el centro de *0*
  y X, Y, Z los puntos medios de los arcos BC, CA, AB que no contienen a A, B, C.

- Por construcción, (XX'), (YY'), (ZZ') son las mediatrices de los lados [BC], [CA], [AB] ;
  en consecuencia, (XX'), (YY') y (ZZ') son concurrentes en O.

- Por definición, X'Y'Z' es ortológico a ABC ;
  Como la ortología es una relación simétrica, ABC es ortológico a X'Y'Z'.

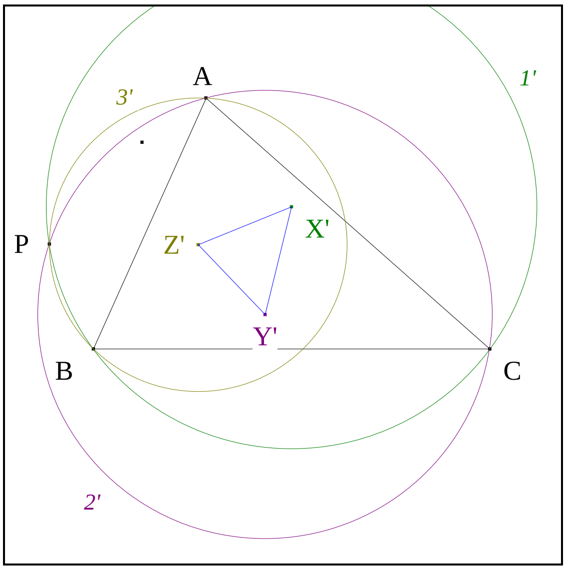
- Conclusión : las rectas *P*a, *P*b y *P*c son concurrentes.

- Llamamos P a ese punto de concurrencia.

Nota histórica : en el mismo mensaje, Darij Grinberg conjeturaba además que ese punto de concurrencia es el simétrico del incentro I con respecto al punto de Feuerbach del triángulo, que ese punto aparece como X(80) en ETC [5] y concluía de ahí diciendo "but I suppose it should be not so easy to prove that the concurrence is X(80)".
Al día siguiente, es decir, el 10 de enero de 2003, Milorad Stevanovic [6] daba una demostración métrica de su resultado. El mismo día, Stevanovic dirigía un segundo mensaje [7] en el que confirmaba la conjetura precedente de Grinberg.

3. Los tres círculos de Grinberg

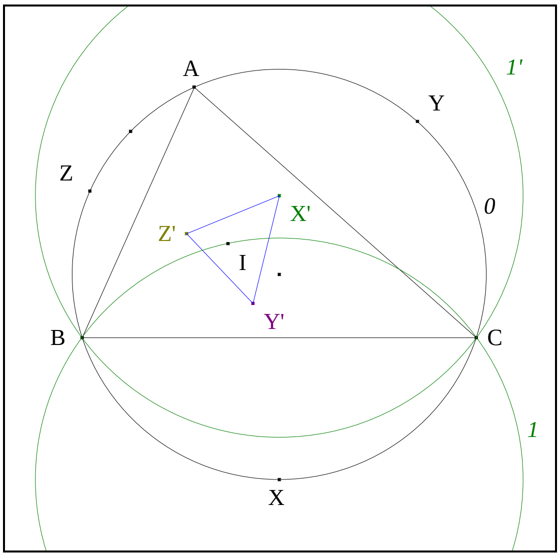
Las notaciones son las mismas que anteriormente.
El 19 de abril de 2004, Darij Grinberg proponía y demostraba la conjetura siguiente :



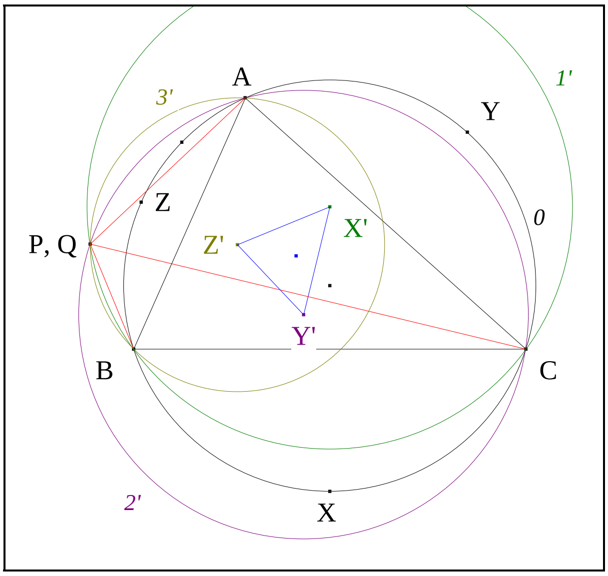
Hipótesis su`plementarias : *1*', *2*', *3*' los círculos de centros X', Y', Z' que pasan por B, C, A.

Conclusión : los círculos *1*', *2*' y *3*' son concurrentes en P.

Esquema de la demostración , (Ayme) :



- Sean *1*, *2*, *3* los círculos de centros X, Y, Z que pasan por B, C, A
  e I el incentro de ABC.
- Según "Un théorème de Catalan" (ver Anexo 2), los círculos *1*, *2* y *3* pasan por I.
- Escolios : (1) *1* e *1*' son simétricos con respecto a (BC)
  (2) *2* y *2*' son simétricos con respecto a (CA)
  (3) *3* y *3*' son simétricos con respecto a (AB).

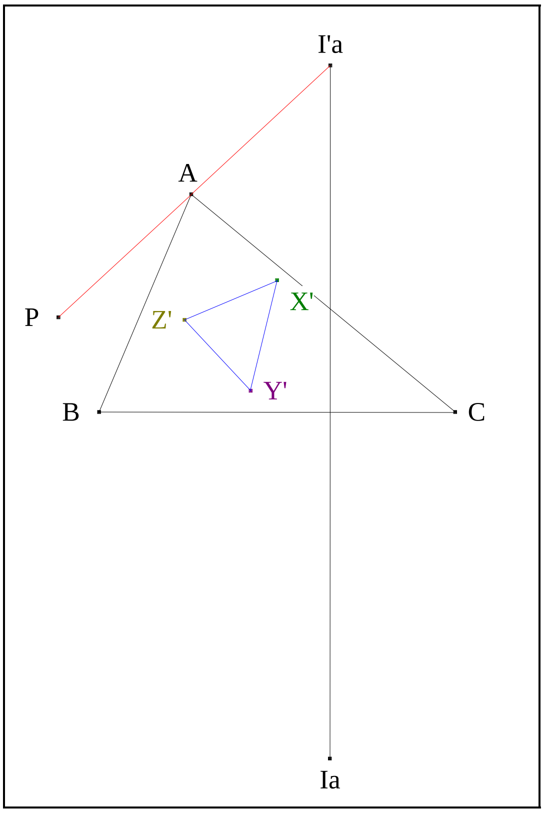


- Según el teorema de Schoute (ver Anexo 3), los círculos *1*', *2*' y *3*' son concurrentes.
- Llamamos Q a ese punto de concurrencia.
- Según el teorema de la mediatriz, (Y'Z'), (Z'X'), (X'Y') son las mediatrices de [AQ], [BQ], [CQ].
  en consecuencia, los puntos P y Q coinciden.
- Conclusión : los círculos *1*', *2*' y *3*' son concurrentes en P.

Nota histórica : la larga demostración de Darij Grinberg recurría al punto de Poncelet de un cuadrilátero para deducir la identidad entre P y Q.
El 19 de abril de 2004, Grobber [8], partiendo del resultado de Stevanovic, atraía la atención de los miembros del grupo *Hyacinthos* demostrando que "la recta (X'Y') es la mediatriz del segmento [A X(80)]". Como consecuencia de esta pertinente observación, Darij Grinberg [9] le respondía el mismo día diciendo "esta observación suya sobre mediatrices ha abierto mis ojos para ver una demostración mucho más sencilla" y daba una demostración más ligera demostrando que las tres perpendiculares concurren en el mismo punto que los tres círculos.

4. Un punto notable sobre cada perpendicular de Grinberg

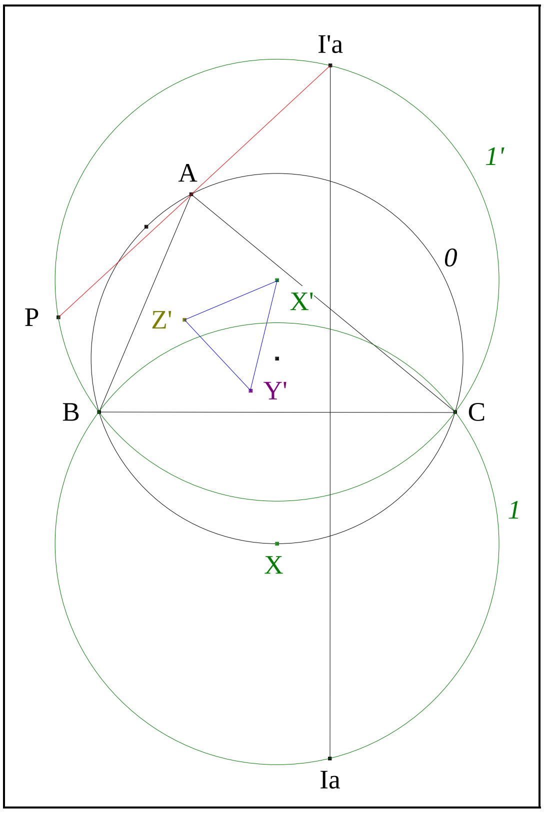
Las notaciones son las mismas que anteriormente.
Recordemos que el 5 de febrero de 2003, Darij Grinberg [10], entonces estudiante de bachillerato en Karlsruhe (Alemania) había enunciado y demostrado por cálculo baricéntrico el resultado siguiente :



Hipótesis suplementarias : Ia el A-exincentro de ABC
e I'a el simétrico de Ia con respecto a (BC).

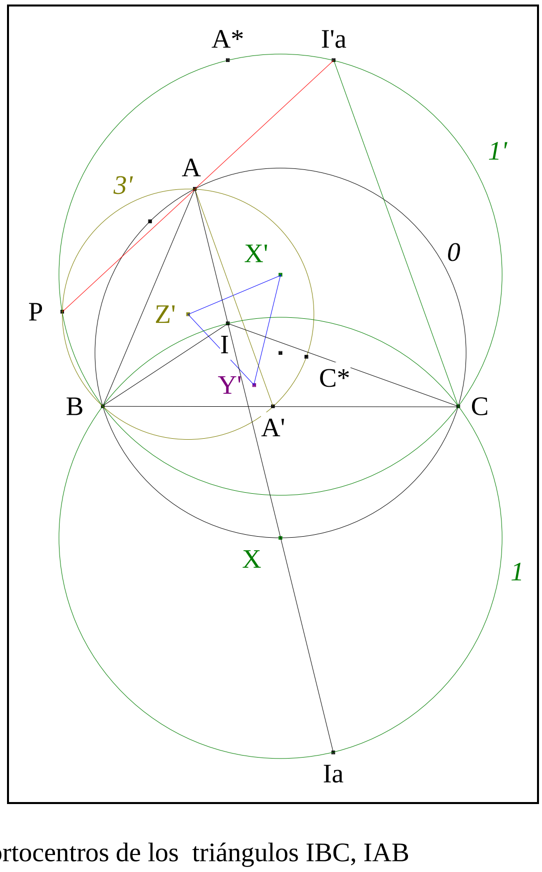
Conclusión : la recta (PA) pasa por I'a.

Esquema de la demostración (Ayme) :



- Según "Un théorème de Catalan" (ver Anexo 2), Ia está sobre sur *1*.

- Como los círculos *1* e *1*' son simétricos respecto a (BC), I'a está sobre *1*'.



- Llamamos A*, C* los ortocentros de los triángulos IBC, IAB
  y A' el segundo punto de intersección de *3*' con (BC).

• Según un resultado de Carnot (ver Anexo 4), el simétrico de A* respecto a (BC) está sobre *1* ;
en consecuencia, A* está sobre *1*'.

• Mutatis mutandis, demostraríamos que C* está sobre *3*'.

• Según "Un théorème de Catalan" (ver Anexo 2), los puntos A, I, X e Ia están alineados.

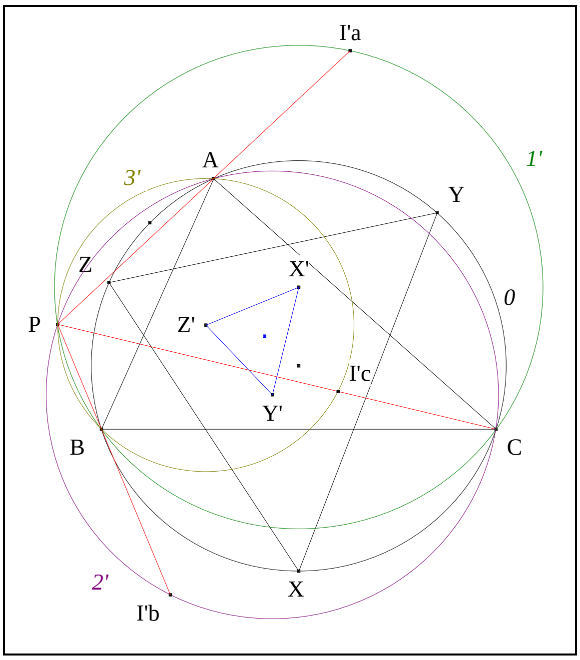
• Siendo C* el ortocentro de A*BC, I es el ortocentro del triángulo AC*B.

• Según un resultado de Carnot (ver Anexo 4), el simétrico de I con respecto a (AB) está sobre *3*'.

• Según el teorema del ángulo inscrito y congruencias de ángulos módulo Π :
<AC*B = <AA'B ;
<AC*B y <AIB son suplementarios;
por simetría, <I'aCB = <BCIa ;
según el teormea del ángulo inscrito, <BCIa = <BIIa ;
por la transitividad de la relación de igualdad, <I'aCB = <BIIa ;
<BIIa y <AIB son suplementarios ;
en consecuencia, <AA'B = <I'aCB i.e. (AA') // (A"C).

• Conclusión : los círculos *3'* e *1'*, los puntos B y P, la recta (A'BC), las paralelas (AA') y (A"C),
Conducen al teorema de Reim (ver Anexo 5) ;
en consecuencia, los puntos A, P e I'a están alineados ; i.e. la recta (PA) pasa por I'a.

Escolio : los otros dos alineamientos



• Llamamos I'b, I'c a los B, C-exincentros de ABC.

• Mutatis mutandis, demostraríamos que
(1) la recta (PB) pasa por I'b
(2) la recta (PC) pasa por I'c.

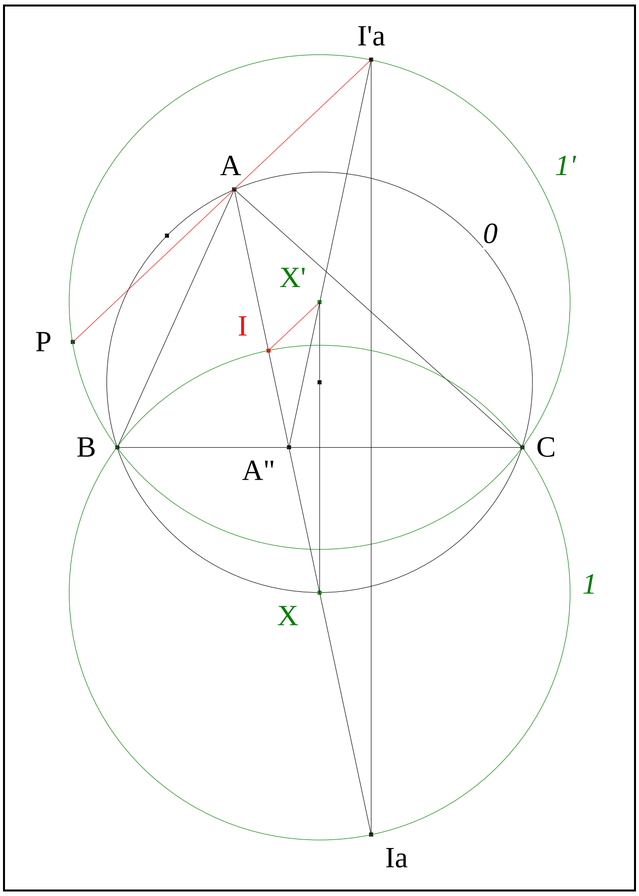
Nota histórica : en ese mismo mensaje, Darij Grinberg identificaba P con X(80) y le daba el nombre de antipunto de Gray, por analogía con el punto de Gray X(79) en ETC.

5. Dos triángulos en perspectiva y el asombroso resultado de Stevanovic [11]

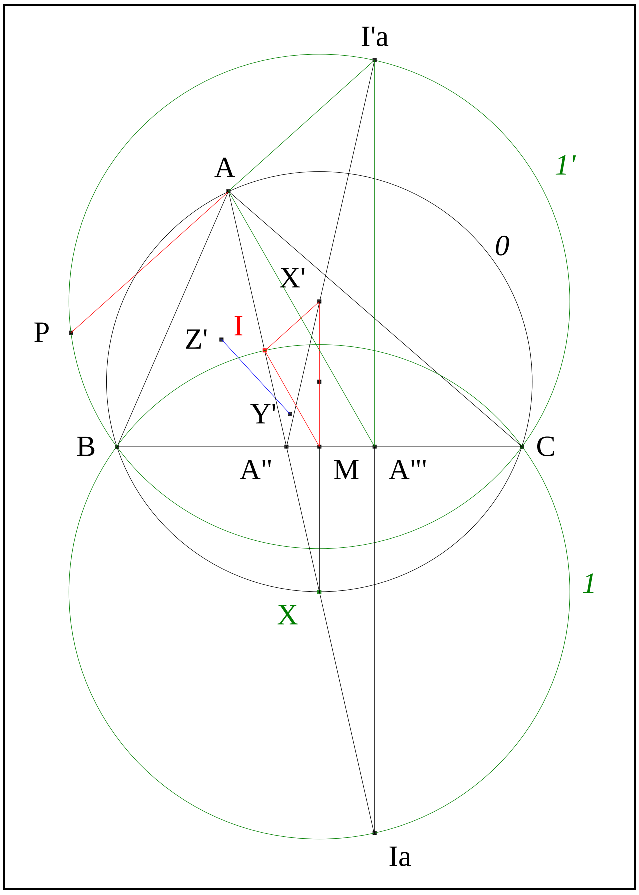
El 8 de octubre de 2005, se abría una vía : ese punto de vista iba a permitorme concluir con una demostración puramente sintética del resultado de Stevanovic.

Esquema de la demostración (Ayme) :

- Las notaciones son las mismas que anteriormente.



- Sea A" el punto de intersección de (AI) y (BC).
- Por la simetría de eje (BC), los puntos A", X' e I'a están alineados.



- Llamamos M al punto medio de [BC],
  y A''' al punto de intersección de (IaI'a) y (BC).

- Según un resultado de Poncelet (ver Anexo 6), (MI) //
(A'''A) ;
  Por construcción, (MX') //
(A'''I'a).

- Según el teorema « débil » de Desargues (ver Anexo 7),
  Por estar los triángulos MIX' y A'''AI'a en perspectiva de centro A', (IX') //
(AI'a).

- Hemos demostrado en 3. y 4., (PAI'a) ⊥
(Y'Z') ;
  en consecuencia, (IX') ⊥
(Y'Z').

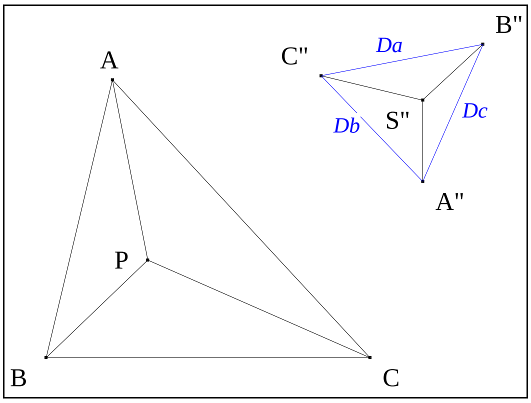
- Mutatis mutandis, demostraríamos que (IY') ⊥
(Z'X')
(IZ') ⊥
(X'Y').

- Conclusión : I es el ortocentro del triángulo X'Y'Z'.

ANEXOS

Las notaciones son las mismas que anteriormente.

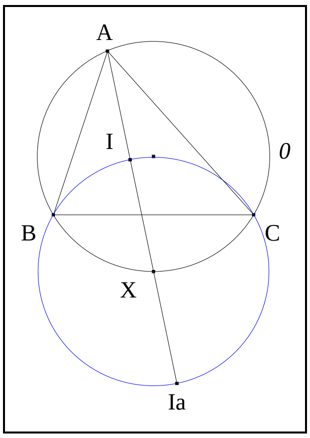
1. Triángulos ortológicos [12]



Hipótesis :	ABC	un triángulo,
	P	un punto,
	*D*a	una perpendicular a (PA),
	*D*b	una perpendicular a (PB),
	*D*c	una perpendicular a (PC),
	A", B", C"	los puntos de intersección de *D*b y *D*c, de *D*c y *D*a, de *D*a y *D*b,
	*D*a"	la perpendicular a (BC) que pasa por A",
	*D*b"	la perpendicular a (CA) que pasa por B"
y	S"	el punto de intersección de *D*a" y *D*b".

Conclusión : las rectas (C"S") y (AB) son perpendiculares.

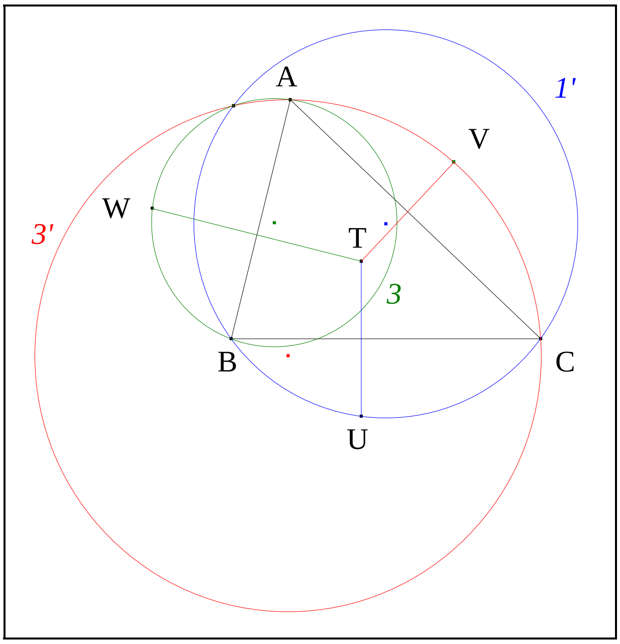
2. Un teorema de Catalan [13]



Hipótesis :	ABC	un triángulo,
	0	el círculo circunscrito a ABC,
	I	le incentro de ABC,
	X	el punto de intersección de (IA) con *0*,
	Ia	el A-exincentro de ABC
e	*1*	el círculo de diámetro [IIa].

Conclusión : *1* pasa por los vértices B y C, y tiene como centro X.

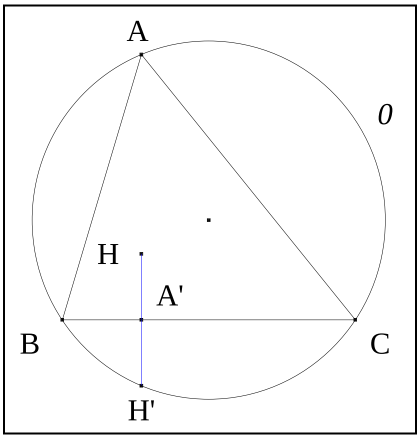
3. El teorema de Schoute [14]



Hypótesis : ABC un triángulo,
T un punto,
U, V, W los simétricos de T con respecto a (BC), (CA), (AB),
y *1'*, *2'*, *3'* los círculos circunscritos a los triángulos UBC, VCA, WAB.

Conclusión : los círculos *1'*, *2'* y *3'* son concurrentes.

4. Un resultado de Carnot [15]

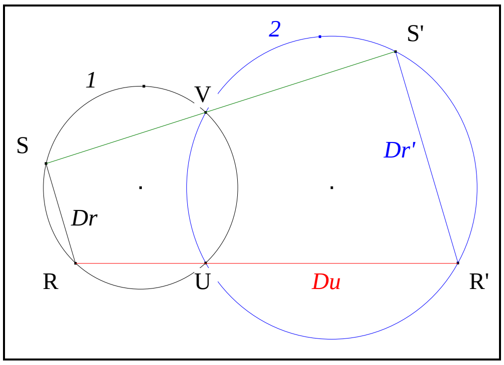


Hypótesis : ABC un triángulo acutángulo,
H su ortocentro,
A' el pie de la altura desde A,
0 el círculo circunscrito a ABC
y H' la intersección de la altura desde A con *0*.

Conclusión : A' es el punto medio de [HH'].

5. El teorema de Reim

A principios del siglo XX , el conocido como F.G.M.(Frère Gabriel-Marie) presenta este teorema [16] en su libro *Exercices de Géométrie*, del que presentamos un recíproco :

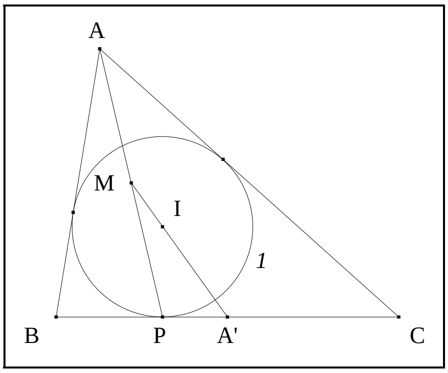


Hipótesis :	*1*, *2*	dos círculos secantes,
	U, V	sus puntos de intersección,
	*D*u	una recta que pasa por U,
	R, R'	los segundos puntos de intersección de *D*u con *1*, *2*,
	*D*r, *D*r'	dos paralelas que pasan por R, R'
y	S, S'	los segundos puntos de intersección de *D*r con *1*, y de *D*r' con *2*.

Conclusión : los puntos S, V y S' están alineados.

Escolio : si los puntos S y V coinciden, entonces la recta (SVS') es tangente a 1 en V.

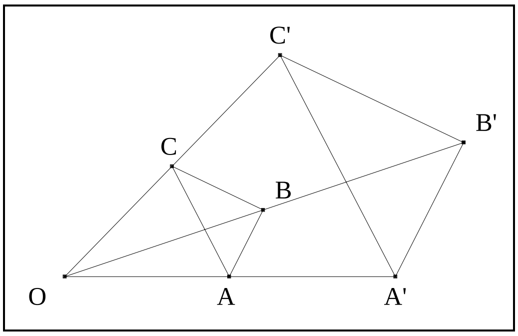
6. Un resultado de Poncelet [17]



Hipótesis :	ABC	un triángulo,
	1	el círculo inscrito en ABC,
	I	el centro de *1*,
	P	el punto de tangencia de *1* con (BC),
	A'	el punto medio de [BC]
y	M	el punto de intersección de (A'I) y (AP).

Conclusión : M es el punto medio de [AP].

7. El teorema « débil » de Desargues



Hipótesis : ABC un triángulo,
y A'B'C' un triángulo tal que (1) (AA'), (BB') y (CC') sean concurrentes en O
(2) (AB) sea paralela a (A'B')
(3) (BC) sea paralala a (B'C')

Conclusión : (AC) es paralela a (A'C').

Comentario : los siete resultados citados en el Anexo pueden ser todos demostrados sintéticamente.

REFERENCIAS

[1] Fuhrmann W., *Synthetische Beweise Planimetrischer Sätze*, Berlin (1890).
[2] Stevanovic M., Orthocenter of Fuhrmann triangle, Message *Hyacinthos* # 5897 du 20/09/2002.
[3] http:/groups.yahoo.com/group/Hyacinthos.
[4] Grinberg D., Fuhrmann triangle, Message *Hyacinthos* # 6301du 09/01/2003.
[5] *Encyclopedia of Triangle Centers*; http://www2.evansville.edu/ck6/encyclopedia/
[6] Stevanovic M., Fuhrmann triangle, Message *Hyacinthos* # 6309 du 10/01/2003.
[7] Stevanovic M., Fuhrmann triangle, Message *Hyacinthos* # 6316 du 10/01/2003.
[8] Grobber, Fuhrmann triangle, Message *Hyacinthos* # 9724 du 19/04/2004.
[9] Grinberg D., Fuhrmann triangle, Message *Hyacinthos* # 9725 du 19/04/2004.
[10] Grinberg D., Gray Point X(79) and X(80), Message *Hyacinthos* # 6491du 05/02/2003.
[11] Stevanovic M., Fuhrmann triangle, Message *Hyacinthos* # 5897 du 20/08/2002.
[12] Steiner J., Problème 54, *Journal* de Crelle vol. 2, 3.
[13] Catalan E, Théorème 20, *Théorèmes et problèmes de Géométrie Élémentaire*, Dunod, Paris (1879) 44.
[14] Schoute P. H. (1846-1913), *Journal de Mathématiques Spéciales* n° 93, p. 57.
[15] Carnot, n° 142, De la corrélation des figures géométriques, (1801) 101.
[16] F. G.-M., Théorème 124, *Exercices de Géométrie*, sixième édition (1920), Rééditions Jacques Gabay, Paris (1991) 283.
[17] Poncelet J. V., *Annales* de Gergonne 12.

Agradecimiento. Agradezco profundamente al Profesor Francisco Bellot Rosado la revisión y traducción de este artículo.

Jean-Louis Ayme jeanlouisayme@yahoo.fr

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI