

Problemas para los más jóvenes (23)

Cinco problemas de teoría de números y combinatoria

23.1: Sean los números enteros $1 \leq q \leq p$. Demostrar que el número

$$a = \left(p + \sqrt{p^2 + q}\right)^2$$

es irracional y su parte fraccionaria $\{a\} = a - [a]$ es mayor que 0,75.

23.2: Demostrar que para $n \geq 2$ se verifica

$$\sum_{k=1}^{n-1} [\sqrt{k}] = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}.$$

23.3: Se considera el conjunto $M = \{1, 2, 3, \dots, 1000000\}$ y el subconjunto suyo A formado por los números que pueden escribirse en la forma

$$m^2 + k^3, \text{ con } m, n \text{ naturales.}$$

¿Qué conjunto tiene más elementos, A o su complementario respecto de M ?

23.4: En el interior de un cuadrado de lado 1 hay 61 puntos. Demostrar que hay dos de esos puntos cuya distancia es menor o igual que $1/5$.

23.5: Se consideran $2n$ puntos en el plano. Demostrar que existe una recta con la propiedad siguiente:

"En cada uno de los semiplanos determinados por esa recta hay n de esos puntos".

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revista_oim/

Edita:

