

Problemas de nivel medio y de Olimpiadas (23)
Cinco problemas de la Competición Húngaro-Israelí

23.1(1993). Sobre una semicircunferencia de radio 1 se toman, en este orden, los puntos A, B, C, D, E . Probar que

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DE^2 + AB \cdot BC \cdot CD + BC \cdot CD \cdot DE \leq 4.$$

23.2 (1994). Tres círculos iguales que pasan por el punto P se cortan mutuamente además en los puntos A, B y C . Los tres círculos están contenidos en un triángulo $A'B'C'$ cuyos lados son tangentes a dos de los círculos. Probar que el área del triángulo $A'B'C'$ es al menos 9 veces el área de ABC .

23.3 (1995). Se consideran los polinomios $f(x) = ax^2 + bx + c$ con coeficientes reales y que verifican $|f(x)| \leq 1$ para $0 \leq x \leq 1$. Hallar el máximo valor de $|a| + |b| + |c|$.

23.4 (1997). Sea O el circuncentro del triángulo acutángulo ABC . Las rectas AO, BO, CO intersecan a los lados opuestos del triángulo en A_1, B_1, C_1 respectivamente. Supongamos que el radio del círculo circunscrito a ABC es $2t$, donde t es un número primo, y que OA_1, OB_1 y OC_1 tienen longitudes enteras. Hallar los lados del triángulo ABC .

23.5 (1999). Si c es un entero positivo, se define la sucesión (a_n) mediante

$$a_1 = c; \quad a_{n+1} = ca_n + \sqrt{(c^2 - 1)(a_n^2 - 1)} \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

Demostrar que todos los a_n son enteros positivos.

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/>

Edita:

