Problema 106

Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.

Sean *a*, *b*, *c* tres números positivos. Demostrar que

$$\sum_{ciclica}\left(\frac{1}{a+b}\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}}\right)\geq\frac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt[3]{abc}}.$$

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España.

El enunciado tal y como se presenta aquí contiene obviamente una errata, pues tomando $a=b=c=2$, se tiene que la desigualdad del enunciado se convierte en

$$\sum_{ciclica}\left(\frac{1}{4}\sqrt{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}\geq\frac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt[3]{2^3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3},$$

que es obviamente falso. Propongo y demuestro dos enunciados alternativos:

Enunciado alternativo 1:

Sean *a*, *b*, *c* tres números positivos. Demostrar que

$$\sum_{ciclica}\left(\frac{1}{a+1}\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}}\right)\geq\frac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt[3]{abc}}.$$

Se tiene que

$$\sum_{ciclica}\left(\frac{1}{a+1}\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}}\right)=\sum_{ciclica}\left(\frac{1}{a(a+1)}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\left(\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{b(b+1)}+\frac{1}{c(c+1)}\right).$$

Luego como

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{b(b+1)}+\frac{1}{c(c+1)}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{abc(a+1)(b+1)(c+1)}}=\frac{3}{\sqrt[3]{abc}\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)}},$$

para demostrar el enunciado alternativo nos bastaría con demostrar que

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\frac{1}{\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)}}\geq\frac{\sqrt[3]{abc}}{1+\sqrt[3]{abc}}.$$

Enunciado alternativo 2:

Sean *a*, *b*, *c* tres números positivos. Demostrar que

$$\sum_{ciclica}\left(\frac{1}{1+b}\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}}\right)\geq\frac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt[3]{abc}}.$$

Se tiene que

$$\sum_{ciclica}\left(\frac{1}{1+b}\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}}\right)=\sum_{ciclica}\left(\frac{1}{a(1+b)}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\left(\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}\right).$$

Luego como

$$\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{abc(a+1)(b+1)(c+1)}}=\frac{3}{\sqrt[3]{abc}\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)}},$$

nos bastaría con demostrar, igual que antes, que

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\frac{1}{\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)}}\geq\frac{\sqrt[3]{abc}}{1+\sqrt[3]{abc}}.$$

Utilicemos ahora la siguiente notación para las medias cuadrática y geométrica de *a,b,c*:

$$Q=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\ ;\qquad\qquad G=\sqrt[3]{abc}\ .$$

Ahora bien,

$$(a+1)(b+1)(c+1)=abc+ab+bc+ca+a+b+c+1$$
$$\leq G^3+a^2+b^2+c^2+3Q+1\leq Q^3+3Q^2+3Q+1=(Q+1)^3,$$

donde se han utilizado la desigualdad del producto escalar, la desigualdad entre medias aritmética y cuadrática y la desigualdad entre medias geométrica y cuadrática. Luego la desigualdad que implica ambos enunciados alternativos se puede escribir como

$$\frac{Q}{\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)}}\geq\frac{G}{G+1}.$$

Pero esto es siempre cierto por la desigualdad recién demostrada y la desigualdad entre medias geométrica y cuadrática, ya que

$$\frac{Q}{\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)}}\geq\frac{Q}{Q+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{Q}}\geq\frac{1}{1+\frac{1}{G}}=\frac{G}{G+1}.$$

Luego se cumplen los dos enunciados alternativos propuestos, dándose la igualdad si y sólo si $a=b=c$, ya que todas las desigualdades utilizadas en la demostración se convierten en igualdades si y sólo si $a=b=c$.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI