Problema 111.

Si x_1, x_2, ..., x_m son números reales estrictamente positivos, m natural y $x > 1$, calcular

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{\frac{\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^x - \sum_{i=1}^{m}(x_i)^x}{m^x - m}} \tag{1}$$

Solución:

Denotemos por L al límite buscado.

En primer lugar, observamos que para $m = 1$ ocurre que tanto el numerador como el denominador de la fracción que interviene se anulan, por tanto supondremos $m > 1$.

Acotaremos el radicando, superior e inferiormente, por expresiones que tengan el mismo límite, y se pueda calcular de un modo sencillo, así el límite buscado existirá y coincidirá con este último.

a) Acotación superior.

Puesto que los números x_i son todos estrictamente positivos y $x > 1$, tenemos la desigualdad

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^x - \sum_{i=1}^{m}(x_i)^x \le \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^x. \tag{2}$$

Además, dado que $m > 1$ y $x > 1$, también podemos acotar el denominador de la siguiente forma,

$$m^x - m \ge m^x - m^{x-1} = m^{x-1}(m-1). \tag{3}$$

Sustituyendo estas dos últimas desigualdades, (2) y (3), en la expresión inicial (1), deducimos

$$\sqrt[x]{\frac{\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^x - \sum_{i=1}^{m}(x_i)^x}{m^x - m}} \le \sqrt[x]{\frac{\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^x}{m^{x-1}(m-1)}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i}{m^{\frac{x-1}{x}}(m-1)^{\frac{1}{x}}},$$

de donde, tomando límites, se sigue

$$L \le \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i. \tag{4}$$

b) Acotación inferior.

Sacando factor común y operando, llegamos a

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^x - \sum_{i=1}^{m}(x_i)^x = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^x \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i)^x}{\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^x}\right] = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^x \left[1 - \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{x_i}{\sum_{j=1}^{m} x_j}\right)^x\right].$$

Entonces, dado que evidentemente $m^x - m \le m^x$, podemos establecer

$$\sqrt[x]{\frac{\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^x - \sum_{i=1}^{m}(x_i)^x}{m^x - m}} \ge \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) \sqrt[x]{1 - \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{x_i}{\sum_{j=1}^{m} x_j}\right)^x}. \tag{5}$$

Ahora bien, el radicando del segundo miembro de la desigualdad anterior es un número real comprendido entre 0 y 1, que además tiende a 1 cuando x tiende a $+\infty$. Esto se debe a que, para cualquiera de los x_i, tenemos $0 < \frac{x_i}{\sum_{j=1}^m x_j} < 1$ y, si $x' > x > 1$,

$$0 < \sum_{i=1}^m \left(\frac{x_i}{\sum_{j=1}^m x_j}\right)^{x'} < \sum_{i=1}^m \left(\frac{x_i}{\sum_{j=1}^m x_j}\right)^{x} < \sum_{i=1}^m \frac{x_i}{\sum_{j=1}^m x_j} = 1.$$

Deducimos entonces $L \geq \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m x_i$, desigualdad que junto con (4), nos conduce a

$$L = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m x_i,$$

es decir, el límite buscado es la media aritmética de los números x_i, $i = 1, \ldots, m$.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI