Problema 112

Solución de Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España.

La condición $a^3+b^3+c^3=0$ reduce la identidad $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$ a la igualdad

$$(a+b+c)^3=3(a+b)(b+c)(c+a)$$

la cual implica $a+b\neq 0$, $b+c\neq 0$, $c+a\neq 0$ y $a+b+c\neq 0$. (En efecto, si, p. e., $a+b=0$ resultaría $c^3=0$ o, equivalentemente, $c=0$ que es contrario a la hipótesis).

A su vez,

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3=0 \Leftrightarrow -a^3 &= b^3+c^3 \\ &= (b+c)\left(b^2-bc+c^2\right) \\ &= (b+c)\left[(b-c)^2+bc\right] \end{aligned}$$

y siendo, según se ha visto, $b+c\neq 0$, obtenemos

$$(b-c)^2+bc=\frac{-a^3}{b+c} \;,$$

$$(b-c+a)(b-c-a)+bc=(b-c)^2-a^2+bc=\frac{-a^3}{b+c}-a^2=\frac{-a^2(a+b+c)}{b+c}$$

y, por sustitución,

$$\sum_{\text{cíclica}}\frac{(b-c)^2+bc}{(b-c+a)(b-c-a)+bc}=\sum_{\text{cíclica}}\frac{a}{a+b+c}=1 \;.$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI