Problema 114.

Hallar los menores números naturales x, y, z; λ, μ, ν que verifican el sistema de ecuaciones

$$x + y = \lambda z, \qquad y + z = \mu x, \qquad z + x = \nu y,$$

siendo $\lambda > \mu > \nu$.

Solución:

Sumando las tres igualdades, obtenemos

$$2(x + y + z) = \lambda z + \mu x + \nu y > \nu(x + y + z),$$

de donde deducimos $\boxed{\nu = 1}$.

Si sumamos ahora solamente las dos primeras igualdades, llegamos a

$$x + 2y + z = \lambda z + \mu x.$$

Teniendo en cuenta que $\nu = 1$, la tercera igualdad del enunciado es $z + x = y$, y sustituyendo en la igualdad anterior, deducimos

$$3(x + z) > \mu(x + z),$$

de donde concluimos $\mu < 3$, es decir, $\mu = 1$ ó $\mu = 2$, pero como μ debe ser mayor que ν, la única solución es $\boxed{\mu = 2}$.

Ahora bien, considerando estos valores de μ y ν, si sumamos las dos últimas igualdades del enunciado, tenemos

$$x + y + 2z = 2x + y,$$

siendo, pues, $2z = x$ y, por tanto, a partir de la tercera igualdad, $y = 3z$, relaciones que sustituidas en la primera igualdad nos aseguran que $\boxed{\lambda = 5}$.

Por tanto, el sistema se ha simplificado:

$$x + y = 5z, \qquad y + z = 2x, \qquad z + x = y,$$

y finalmente, como ya sabemos que $y = 3z$ y $2z = x$, la solución con los naturales más pequeños será evidentemente $\boxed{z = 1,\ y = 3 \text{ y } x = 2}$.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: