

Problema 115

Propuesto por el editor

Un triángulo está inscrito en la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

y tiene su baricentro en el centro de la elipse. Determinar el lugar geométrico del circuncentro del triángulo.

Solución de Daniel Lasasosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Dada cualquier elipse de la forma

$$\frac{(x-x_1)^2}{a^2} + \frac{(y-y_1)^2}{b^2} = k,$$

con k positivo, tiene 0, 1 o 2 puntos comunes con la elipse dada, pero nunca más. Esto es trivial considerando que una misma transformación de coordenadas convertiría a las dos elipses en circunferencias, preservando los puntos de tangencia o coincidencia.

Constrúyase entonces una tal elipse con $k=3$, y siendo (x_1, y_1) un punto cualquiera de la elipse dada. Se comprueba trivialmente que $(-x_1, -y_1)$ es exterior a la elipse construida pero está sobre la elipse dada. Sin embargo, (x_1, y_1) es obviamente interior a la elipse construida estando también sobre la dada. Luego ambas elipses deben cortarse en exactamente dos puntos.

Sean ahora (x_2, y_2) y (x_3, y_3) dos puntos tales que el triángulo formado por estos dos puntos y (x_1, y_1) está inscrito en la elipse dada y tiene su baricentro en el centro de la elipse dada. Entonces, han de ser nulas la suma de los x_i y la suma de los y_i , luego

$$\begin{aligned} \frac{(x_2-x_1)^2}{a^2} + \frac{(y_2-y_1)^2}{b^2} &= \frac{2x_2^2 + 2x_1^2 - (x_2+x_1)^2}{a^2} + \frac{2y_2^2 + 2y_1^2 - (y_2+y_1)^2}{b^2} \\ &= 2\left(\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2}\right) + 2\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right) - \left(\frac{(-x_3)^2}{a^2} + \frac{(-y_3)^2}{b^2}\right) = 3. \end{aligned}$$

Luego (x_2, y_2) es uno de los dos puntos de intersección de la elipse dada y la construida, siendo el otro obviamente (x_3, y_3) , pues también debe satisfacer la anterior relación. Se concluye entonces que, dado un punto cualquiera de una elipse, existen exactamente otros dos puntos de la elipse que forman con el primero un triángulo inscrito en la elipse y cuyo baricentro es el centro de la elipse.

Hallemos ahora dichos puntos, que por lo tanto deben satisfacer las ecuaciones de la elipse dada y la construida:

$$2\left(\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2}\right) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 3 = -1; \quad \frac{y}{b} = -\frac{b}{y_1}\left(\frac{1}{2} + \frac{x_1x}{a^2}\right);$$

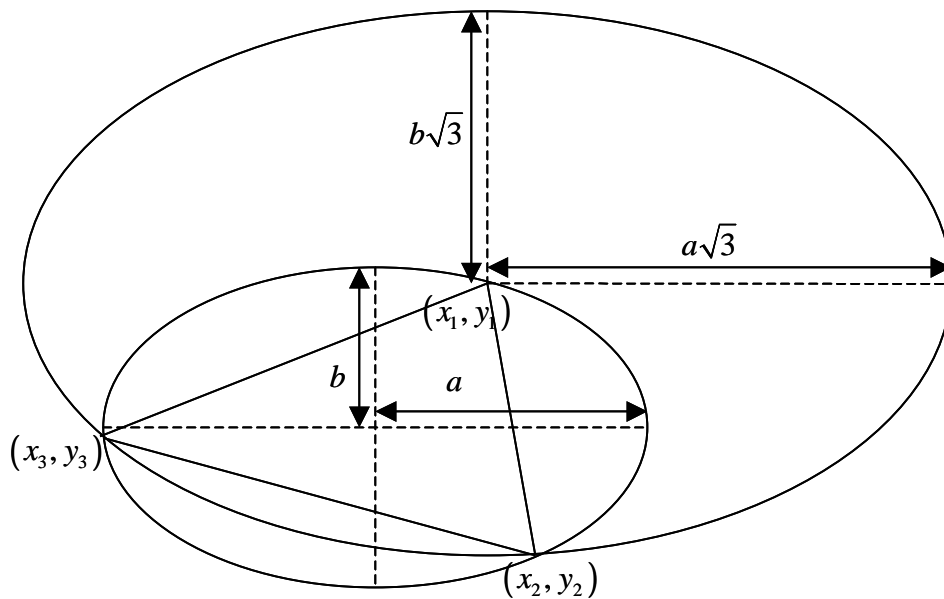
$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left(1 + \frac{b^2x_1^2}{a^2y_1^2}\right)\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2x_1x}{a^2y_1^2} + \frac{b^2}{4y_1^2} = \frac{b^2x^2}{a^2y_1^2} + \frac{b^2x_1x}{a^2y_1^2} + \frac{b^2}{4y_1^2};$$

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{x_1}{2a}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{x_1x}{a^2} + \frac{x_1^2}{4a^2} = \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{1}{4} + \frac{x_1^2}{4a^2} = \left(\frac{y_1\sqrt{3}}{2b}\right)^2.$$

Luego sin pérdida de generalidad, podemos tomar

$$\frac{x_2}{a} = -\frac{x_1}{2a} + \frac{y_1\sqrt{3}}{2b}; \quad \frac{y_2}{b} = -\frac{y_1}{2b} - \frac{x_1\sqrt{3}}{2a};$$

$$\frac{x_3}{a} = -\frac{x_1}{2a} - \frac{y_1\sqrt{3}}{2b}; \quad \frac{y_3}{b} = -\frac{y_1}{2b} + \frac{x_1\sqrt{3}}{2a}.$$



Nótese que cuando (x_1, y_1) recorre el arco corto entre los puntos de coordenadas

$$(a, 0) \quad \text{y} \quad \left(-\frac{a}{2}, \frac{b\sqrt{3}}{2}\right),$$

entonces (x_2, y_2) y (x_3, y_3) recorren respectivamente los arcos cortos entre los puntos

$$\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{y} \quad (a, 0); \quad \left(-\frac{a}{2}, \frac{b\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{y} \quad \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b\sqrt{3}}{2}\right).$$

Luego los tres puntos recorren toda la elipse. Calculamos ahora las mediatrices de los lados cuyo vértice común es (x_1, y_1) . Las pendientes serán

$$-\frac{x_{2,3} - x_1}{y_{2,3} - y_1} = -\frac{abx_1\sqrt{3} \mp a^2y_1}{aby_1\sqrt{3} \pm b^2x_1} = \frac{a}{b} \frac{4abx_1y_1 \mp (a^2y_1^2 + b^2x_1^2)\sqrt{3}}{b^2x_1^2 - 3a^2y_1^2} = \frac{4a^2x_1y_1 \mp a^3b\sqrt{3}}{4b^2x_1^2 - 3a^2b^2}.$$

Deberán además dichas mediatrices pasar por los puntos medios de dichos lados:

$$\begin{aligned} h &= \frac{y_1 + y_{2,3}}{2} - \frac{4a^2x_1y_1 \mp a^3b\sqrt{3}}{4b^2x_1^2 - 3a^2b^2} \frac{x_1 + x_{2,3}}{2} = \frac{a^2 - b^2}{4ab^2} \frac{3a^3y_1 - 4ax_1^2y_1 \pm 4bx_1^3\sqrt{3} \mp 3a^2bx_1\sqrt{3}}{(4x_1^2 - 3a^2)} \\ &= -\frac{a^2 - b^2}{4ab^2} (ay_1 \mp bx_1\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el circuncentro (x_0, y_0) ha de cumplir

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{4a^2x_1y_1 \mp a^3b\sqrt{3}}{4b^2x_1^2 - 3a^2b^2} x_0 - \frac{a^2 - b^2}{4ab^2} (ay_1 \mp bx_1\sqrt{3}); \\ \frac{2a^3b\sqrt{3}}{4b^2x_1^2 - 3a^2b^2} x_0 &= \frac{a^2 - b^2}{2ab} x_1\sqrt{3}; & \frac{x_0}{b} &= \frac{a^2 - b^2}{4ab} \left(4\frac{x_1^2}{a^2} - 3 \right) \frac{x_1}{a}; \\ y_0 &= \frac{4a^2x_1y_1}{4b^2x_1^2 - 3a^2b^2} x_0 - \frac{a^2 - b^2}{4b^2} y_1; & \frac{y_0}{a} &= \frac{a^2 - b^2}{4ab} \left(4\frac{x_1^2}{a^2} - 1 \right) \frac{y_1}{b}. \end{aligned}$$

Ahora bien, de aquí se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{x_0^2}{b^2} + \frac{y_0^2}{a^2} &= \left(\frac{a^2 - b^2}{4ab} \right)^2 \left[16\frac{x_1^6}{a^6} - 24\frac{x_1^4}{a^4} + 9\frac{x_1^2}{a^2} + 16\frac{x_1^4y_1^2}{a^4b^2} - 8\frac{x_1^2y_1^2}{a^2b^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \right] \\ &= \left(\frac{a^2 - b^2}{4ab} \right)^2 \left(-8\frac{x_1^4}{a^4} - 8\frac{x_1^2y_1^2}{a^2b^2} + 9\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \right) = \left(\frac{a^2 - b^2}{4ab} \right)^2 \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \right) = \left(\frac{a^2 - b^2}{4ab} \right)^2. \end{aligned}$$

Luego el circuncentro del triángulo está sobre una elipse cuyo centro coincide con el de la elipse dada y cuyos semiejes en las direcciones x e y miden, respectivamente,

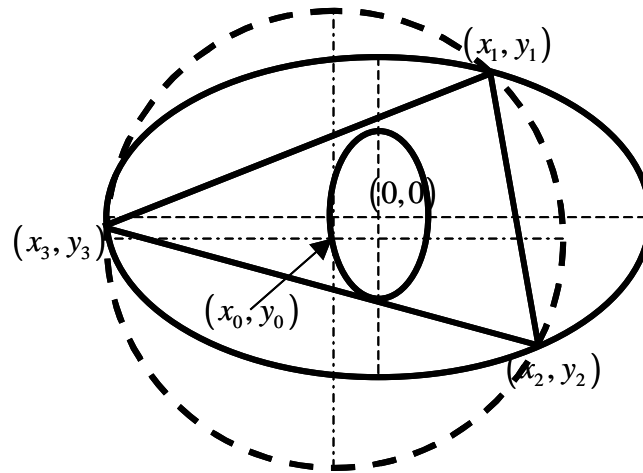
$$\frac{|a^2 - b^2|}{4a}, \quad \frac{|a^2 - b^2|}{4b}.$$

Es decir, es una elipse que se puede obtener a partir de la dada mediante una rotación de $\pi/2$ alrededor de su centro y una homotecia sobre el mismo punto de razón

$$\frac{|a^2 - b^2|}{4ab}.$$

Al recorrer (x_1, y_1) el arco antes mencionado de la elipse dada, se comprueba trivialmente que (x_0, y_0) recorre toda la elipse descrita. Luego todo punto de dicha elipse

es el circuncentro de un triángulo inscrito en la elipse dada en el enunciado, y cuyo baricentro es el centro de dicha elipse.



Recíprocamente, dado un punto cualquiera de la elipse que hemos hallado, podemos resolver la ecuación cúbica en x

$$\frac{x_0}{a^2 - b^2} = \frac{x}{4a} \left(2 \frac{x}{a} + \sqrt{3} \right) \left(2 \frac{x}{a} - \sqrt{3} \right),$$

cuyas tres soluciones corresponden a las coordenadas x de los tres vértices de dicho triángulo.

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revista_oim/

Edita:

