

Problemas de nivel medio e de Olimpiadas (23)

23.1. Sobre unha semicircunferencia de raio 1, tómanse, nesta orde, os puntos  $A, B, C, D, E$ . Probar que

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DE^2 + AB \cdot BC \cdot CD + BC \cdot CD \cdot DE \leq 4.$$

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, España):

Sexan  $A', E'$  os puntos diametralmente opostos da semicircunferencia, nesta orde. Entón

$$\begin{aligned} & AB^2 + BC^2 + CD^2 + DE^2 + AB \cdot BC \cdot CD + BC \cdot CD \cdot DE \\ & \stackrel{(1)}{\leq} (A'B^2 + BC^2 + A'B \cdot BC \cdot CD) + (CD^2 + DE'^2 + BC \cdot CD \cdot DE') \\ & \stackrel{(2)}{\leq} (A'B^2 + BC^2 + A'B \cdot BC \cdot CE') + (CD^2 + DE'^2 + A'C \cdot CD \cdot DE') \\ & \stackrel{(3)}{=} (A'B^2 + BC^2 + A'B \cdot BC \cdot 2 \cos \angle A'E'C) + (CD^2 + DE'^2 + 2 \cos \angle CA'E' \cdot CD \cdot DE') \\ & \stackrel{(4)}{=} A'C^2 + CE'^2 \stackrel{(5)}{=} A'E'^2 = 4 \end{aligned}$$

(1)  $AB \leq A'B$  e  $DE \leq DE'$  (igualdades se e só se  $A' \equiv A, E' \equiv E$ ).

(2)  $CD \leq CE'$  (igualdade sse  $D \equiv E \equiv E'$ ),  $BC \leq A'C$  (igualdade sse  $A' \equiv A \equiv B$ ); así, en (2) dáse a igualdade se e só se  $A' \equiv A \equiv B, D \equiv E \equiv E'$ .

(3)  $\angle CA'E' = \frac{\pi}{2}$ , por ser un ángulo inscrito nunha semicircunferencia;  $\angle A'E'C = \frac{\pi}{2} - \angle CA'E'$ , por

ser  $\pi$  a suma dos ángulos interiores de  $A'CE'$ ;  $\cos \angle A'E'C = \frac{CE'}{A'E'} = \frac{CE'}{2}$ ,

$$\cos \angle CA'E' = \frac{A'C}{A'E'} = \frac{A'C}{2}.$$

(4)  $\angle A'BC = \pi - \angle A'E'C = \left( = \frac{\pi}{2} + \angle CA'E' \right)$ , por ser  $\angle A'BC$  inscrito e abarcar o trozo de

semicircunferencia que non abarcaba  $\angle A'E'C$ , logo  $\cos \angle A'BC = -\cos \angle A'E'C$ , co cal o teorema do coseno en  $A'BC$  implica que  $A'C^2 = A'B^2 + BC^2 - 2A'B \cdot BC \cos \angle A'BC = A'B^2 + BC^2 + 2A'B \cdot BC \cos \angle A'E'C$ ;

analogamente, o teorema do coseno en  $CDE'$  implica que  $CE'^2 = CD^2 + DE'^2 + A'C \cdot CD \cdot DE' = CD^2 + DE'^2 + 2CD \cdot DE' \cos \angle CA'E'$ .

(5) Teorema de Pitágoras en  $A'CE'$ .

E dáse a igualdade no enunciado se e só se dá en (1) e (2), é dicir, se e só se  $A' \equiv A \equiv B, D \equiv E \equiv E'$ , ou sexa, só e cando os puntos tomados son, ó sumo, tres: os extremos da semicircunferencia e  $C$  un punto calquera da mesma.

Polo tanto, se os cinco puntos tomados son distintos, dáse a desigualdade estrita no enunciado.

## Problemas de nivel medio e de Olimpíadas (23)

23.2. Tres círculos iguais, que pasan polo punto  $P$ , córtanse mutuamente ademais nos puntos  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Os tres círculos están contidos nun triángulo  $A'B'C'$  cuxos lados son tanxentes a dous dos círculos. Probar que a área do triángulo  $A'B'C'$  é ao menos 9 veces a área de  $ABC$ .

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, España):

Sexan:  $A''$ , o centro do círculo que pasa por  $P$ ,  $B$  e  $C$ ;

$B''$ , o centro do círculo que pasa por  $P$ ,  $C$  e  $A$ ;

$C''$ , o centro do círculo que pasa por  $P$ ,  $A$  e  $B$ ;

$r$ , o raio dos círculos.

$PA'' = PB'' = PC'' (= r)$ , logo  $P$  é o circuncentro de  $A''B''C''$ .

Ademais,  $PA'' = PB'' (= r)$ , logo  $P$  está na mediatriz de  $A''B''$ ,  $CA'' = CB'' = r$ , e  $C$  tamén está na mediatriz de  $A''B''$ , co cal  $PC$  é a mediatriz de  $A''B''$ . Analogamente,  $PA$  é a mediatriz de  $B''C''$  e  $PB$  é a mediatriz de  $C''A''$ . Así,  $PC \perp A''B''$ ,  $PA \perp B''C''$  e  $PB \perp C''A''$ .

Supoñendo que a notación elidida para designar a  $A'B'C'$  é tal que  $A'B' \parallel A''B''$ ,  $B'C' \parallel B''C''$  e  $C'A' \parallel C''A''$ , resulta que  $A'B'C'$  e  $A''B''C''$  teñen os lados respectivamente paralelos, tendo polo tanto os mesmos ángulos, co cal son semellantes.

Lema 1:  $A''B''C''$  é igual a  $ABC$ , e teñen os lados respectivamente paralelos.

Proba:

Verase que  $ABA''B''$  é un paralelogramo, co cal os lados opostos do mesmo serán paralelos e da mesma lonxitude; en particular,  $A''B'' \parallel AB$  e  $A''B'' = AB$ ; analogamente se probaría para os outros dous pares de lados dos triángulos.

Como  $AB''$  e  $BA''$  teñen a mesma lonxitude ( $r$ ), se se proba que son paralelos resultará que o cuadrilátero  $ABA''B''$  terá dous lados opostos paralelos e da mesma lonxitude, sendo polo tanto un paralelogramo. Para ver que  $AB'' \parallel BA''$ , probarase que  $BA$  e  $A''B''$  forman o mesmo ángulo coa recta común  $AB''$ , é dicir, que os ángulos  $\angle BAB''$  e  $\angle AB''A''$  son suplementarios.

Sexan  $\varphi = \angle BC''A''$  e  $\theta = \angle B''C''A''$ . Como  $AB''C''$  é isóscele con  $AC'' = AB'' (= r)$ , resulta que  $\angle AB''C'' = \theta$  e, por ser  $\pi$  a suma dos ángulos interiores de  $AB''C''$ , que  $\angle CA''B'' = \pi - 2\theta$ . Como  $C''A'' \perp BP$  e  $C''BP$  é isóscele, tense que  $C''A''$  é a altura desde  $C''$  e a bisectriz de  $\angle BC''P$  en dito triángulo, co cal  $\angle A''C''P = \angle BC''A'' = \varphi$ , de onde  $\angle BC''P = 2\varphi$ .

Analogamente,  $C''B''$  é a bisectriz de  $\angle PC''A''$  en  $C''PA$ , logo  $\angle PC''B'' = \angle B''C''A'' = \theta$  e, por tanto,  $\angle PC''A'' = 2\theta$ . Entón  $\angle BCA'' = \angle BC''P + \angle PC''A'' = 2\varphi + 2\theta$ .

Así,  $AC''B$  é un triángulo isóscele con ángulo no vértice igual a  $2\varphi + 2\theta$ , sendo polo tanto os

outros dous ángulos  $(\angle ABC'' =) \angle C''AB = \frac{\pi - (2\varphi + 2\theta)}{2}$ . Entón

$$\angle BAB'' = \angle C''AB'' - \angle C''AB = \pi - 2\theta - \frac{\pi - 2\varphi - 2\theta}{2} = \frac{\pi}{2} + \varphi - \theta.$$

Pero  $\angle AB''C'' = \theta$  ( $AC''B''$  é isóscele con  $AC'' = AB''$  e con  $\angle B''C''A'' = \theta$ ) e  $\angle C''B''P = \theta$ ; como a suma dos ángulos interiores de  $PB''C''$  é igual a  $\pi$ , será  $\angle B''PC'' = \pi - 2\theta$ . Como  $PC''A''$  é isóscele, sendo  $\angle A''C''P = \varphi$  un dos seus ángulos iguais, o ángulo no vértice  $P$  será  $\angle C''PA'' = \pi - 2\varphi$ .

Logo  $\angle A''PB'' = 2\pi - (\angle B''PC'' + \angle C''PA'') = 2\pi - (\pi - 2\theta + \pi - 2\varphi) = 2\varphi + 2\theta$ , sendo así  $PA''B''$  isóscele con  $PA'' = PB''$  e ángulo no vértice  $2\varphi + 2\theta$ , co cal os outros dous ángulos son iguais a

$$\angle PB''A'' = \frac{\pi - (2\varphi + 2\theta)}{2} = \frac{\pi}{2} - \varphi + \theta.$$

En resumo,  $\angle BAB'' = \frac{\pi}{2} + \varphi - \theta$  e  $\angle PB''A'' = \frac{\pi}{2} - \varphi + \theta$ ; polo tanto,  $\angle BAB'' + \angle PB''A'' = \pi$ , como se quería probar.

Sexan:

$A_1''$ : a proxección de  $A''$  sobre  $A'B'$ ;  $B_1''$ : a proxección de  $B''$  sobre  $A'B'$ ;

$B_2''$ : a proxección de  $B''$  sobre  $B'C'$ ;  $C_2''$ : a proxección de  $C''$  sobre  $B'C'$ ;

$C_3''$ : a proxección de  $C''$  sobre  $C'A'$ ;  $A_3''$ : a proxección de  $A''$  sobre  $C'A'$ ;

$$a = BC = B''C''; b = CA = C''A''; c = AB = A''B''; p = \frac{a+b+c}{2};$$

$$x = A'A_1'' = A'A_3'' \left( = \sqrt{\text{Pot}(A', C(A'', r))} \right); y = B'B_1'' = B'B_2'';$$

$$z = C'C_2'' = C'C_3''; \alpha = \angle BAC = \angle B''AC'' = \angle B'A'C'; \beta = \angle CBA = \angle C''B''A'' = \angle C'B'A' \text{ e}$$

$$\gamma = \angle CBA = \angle C''B''A'' = \angle A'C'B'.$$

Hai que probar que  $\frac{[A'B'C']}{[ABC]} \geq 9$ , ou equivalentemente, que  $\frac{[A'B'C']}{[A''B''C'']} \geq 9$ . Se  $k$  é a razón de

semellanza de  $A''B''C''$  a  $A'B'C'$ , tense que  $\frac{[A'B'C']}{[A''B''C'']} = k^2$  e que

$$k = \frac{A'B'}{A''B''} = \frac{B'C'}{B''C''} = \frac{C'A'}{C''A''} = \frac{A'B' + B'C' + C'A'}{A''B'' + B''C'' + C''A''}$$

$$= \frac{(A'A_1'' + A''B'' + B_1''B') + (B'B_2'' + B''C'' + C_2''C') + (C'C_3'' + C''A'' + A_3''A')}{A''B'' + B''C'' + C''A''} = \frac{x+c+y+y+a+z+z+b+x}{c+a+b}$$

$$= 2 \frac{x+y+z}{a+b+c} + 1, \text{ co cal o resultado a demostrar é } x+y+z \geq a+b+c.$$

Pero  $\cot(\angle A_1''A'A'') = \frac{A'A_1''}{A''A_1''}$ , é dicir,  $x = r \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ; analogamente,  $y = r \cot\left(\frac{\beta}{2}\right)$  e  $z = r \cot\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ .

Ademais, por ser  $r$  o raio do círculo circunscrito a  $A''B''C''$ , do teorema dos senos dedúcese que

$$2r = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a+b+c}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}, \text{ co cal a desigualdade a verificar pasa a ser:}$$

$$\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cot\left(\frac{\beta}{2}\right) + \cot\left(\frac{\gamma}{2}\right) \geq 2(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma).$$

**Lema 2:**  $\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cot\left(\frac{\beta}{2}\right) + \cot\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cot\left(\frac{\beta}{2}\right)\cot\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ .

Proba:

Dedúcese de que  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , pois

$$\frac{\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cot\left(\frac{\beta}{2}\right) + \cot\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cot\left(\frac{\beta}{2}\right)\cot\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{1}{\cot\left(\frac{\beta}{2}\right)\cot\left(\frac{\gamma}{2}\right)} + \frac{1}{\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cot\left(\frac{\gamma}{2}\right)} + \frac{1}{\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cot\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

$$= \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) + \tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) + \left[\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\stackrel{(i)}{=} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) + \frac{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \frac{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = 1$$

$$(1) \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}; \tan\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \tan\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}.$$

**Lema 3:**  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right).$

Proba:

Dedúcese de que  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , pois

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma &= (\sin \alpha + \sin \beta) + [\sin \gamma - \sin(\alpha + \beta + \gamma)] \\ &= 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta + 2\gamma}{2}\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \left[ -2 \sin\left(\frac{\frac{\alpha - \beta}{2} + \frac{\alpha + \beta + 2\gamma}{2}}{2}\right) \sin\left(\frac{\frac{\alpha - \beta}{2} - \frac{\alpha + \beta + 2\gamma}{2}}{2}\right) \right] \\ &= -4 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) \sin\left(-\frac{\beta + \gamma}{2}\right) = -4 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\right) \left[ -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \right] = 4 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right). \end{aligned}$$

Dos lemas 2 e 3 dedúcese que a desigualdade que hai que probar é:

$$\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cot\left(\frac{\beta}{2}\right) \cot\left(\frac{\gamma}{2}\right) \geq 8 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right), \text{ ou a súa equivalente: } \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \leq \frac{1}{8}.$$

**Lema 4:**  $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ ,  $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}}$  e  $\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$ .

Proba:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{[(b+c) - a][(b+c) + a]}{4bc}} = \sqrt{\frac{2(p-b)2(p-c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

e similarmente para as outras dúas igualdades.

$$\begin{aligned} \text{Entón } \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \leq \frac{1}{8} &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}} \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \leq \frac{1}{8} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}{a^2b^2c^2}} \leq \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} \leq \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade das medias xeométrica e aritmética por parellas aos números positivos  $p-a$ ,  $p-b$  e  $p-c$  (porque  $a < b+c$ ,  $b < c+a$  e  $c < a+b$ ), obtense que

$$\sqrt{(p-a)(p-b)} \leq \frac{(p-a) + (p-b)}{2} = \frac{c}{2}, \text{ con igualdade se e só se } p-a = p-b, \text{ é dicir, se e só se } a=b;$$

$$\sqrt{(p-b)(p-c)} \leq \frac{(p-b) + (p-c)}{2} = \frac{a}{2}, \text{ con igualdade se e só se } b=c;$$

$$\sqrt{(p-c)(p-a)} \leq \frac{(p-c) + (p-a)}{2} = \frac{b}{2}, \text{ con igualdade se e só se } c=a.$$

Multiplicando membro a membro estas tres desigualdades, chégase a que

$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{abc}{8}$ , con igualdade se e só se  $a=b=c$ , ou sexa, se e só se os centros dos tres círculos son equidistantes, como se quería probar.

Problemas de nivel medio e de Olimpiadas (23)

23.3. Consideráanse os polinomios  $f(x) = ax^2 + bx + c$  con coeficientes reais e que verifican  $|f(x)| \leq 1$  para  $0 \leq x \leq 1$ . Achar o máximo valor de  $|a| + |b| + |c|$ .

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, España):

$f(0) = c$ ;  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c$ ;  $f(1) = a + b + c$  implican que  $\begin{cases} a + b = -f(0) + f(1) \\ a + 2b = -4f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) \end{cases}$ , de onde

$b = -3f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) - 1f(1) \stackrel{def}{=} [-3, 4, -1]$ ,  $a = [2, -4, 2]$  e  $c = [1, 0, 0]$ . Sexa  $s = |a| + |b| + |c|$ .

Ao ser  $f(x) \leq 1$  e  $-f(x) \leq 1$  para  $0 \leq x \leq 1$ , tense que:

Se  $a \leq 0$ :

Se  $b \leq 0$ :

Se  $c \leq 0$ :  $s = -a - b - c = -[2, -4, 2] - [-3, 4, -1] - [1, 0, 0] = [0, 0, -1] = -f(1) \leq 1$ ;

Se  $c \geq 0$ :  $s = 2f(0) - f(1) \leq 2 \cdot 1 + 1 = 3$ .

Se  $b \geq 0$ :

Se  $c \leq 0$ :  $s = [-6, 8, -3] \leq 6 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 17$  (igualdade se e só se  $f(0) = -1$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$  e  $f(1) = -1$ );

Se  $c \geq 0$ :  $s \leq 5 + 8 + 2 = 15$ .

Se  $a \geq 0$ : aparecerán casos simétricos dos anteriores; en efecto:

Se  $b \leq 0$ :

Se  $c \leq 0$ :  $s \leq 15$ ;

Se  $c \geq 0$ :  $s \leq 17$ .

Se  $b \geq 0$ :

Se  $c \leq 0$ :  $s \leq 3$ ;

Se  $c \geq 0$ :  $s \leq 1$ .

Por tanto, o máximo valor de  $s$  é 17, que aparece nun dos dous casos seguintes:

1) Cando  $a \leq 0$ ,  $b \geq 0$  e  $c \leq 0$ , acadándose se e só se  $-6f(0) + 8f\left(\frac{1}{2}\right) - 3f(1) = -6 \cdot (-1) + 8 \cdot 1 - 3 \cdot (-1)$ ,

é dicir, se e só se  $f(0) = -1$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$  e  $f(1) = -1$ , condicións estas que definen un único

polinomio:  $f(x) = -8x^2 + 8x - 1$ .

2) Cando  $a \geq 0$ ,  $b \leq 0$  e  $c \geq 0$ , para o polinomio  $f(x) = 8x^2 - 8x + 1$ .

Problemas de nivel medio e de Olimpíadas (23)

23.4. Sexa  $O$  o circuncentro do triángulo acutángulo  $ABC$ . As rectas  $AO$ ,  $BO$ ,  $CO$  intersecan aos lados opostos do triángulo en  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  respectivamente. Supoñamos que o raio do círculo circunscrito a  $ABC$  é  $t$ , onde  $t$  é un número primo, e que  $OA_1$ ,  $OB_1$  e  $OC_1$  teñen lonxitudes enteiras. Achar os lados do triángulo  $ABC$ .

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, España):

Sexan  $a_1 = OA_1$ ,  $b_1 = OB_1$ ,  $c_1 = OC_1$ ,  $C'$  o pé da altura que parte de  $C$  en  $ABC$  e  $O_c$  o pé da altura que parte de  $O$  en  $ABO$ .

Como  $OO_cC_1$ ,  $CC'C_1$  son semellantes (triángulos rectángulos co mesmo ángulo en  $C_1$ ), teñen os lados respectivamente proporcionais; en particular,  $\frac{OO_c}{CC'} = \frac{OC_1}{CC_1}$ . Así,

$$\frac{[OAB]}{[ABC]} = \frac{\frac{AB \cdot OO_c}{2}}{\frac{AB \cdot CC'}{2}} = \frac{OO_c}{CC'} = \frac{OC_1}{CC_1} = \frac{c_1}{t + c_1}; \text{ análogamente, } \frac{[OBC]}{[ABC]} = \frac{a_1}{t + a_1} \text{ e } \frac{[OCA]}{[ABC]} = \frac{b_1}{t + b_1}.$$

Entón  $1 = \frac{[OBC] + [OCA] + [OAB]}{[ABC]} = \frac{a_1}{t + a_1} + \frac{b_1}{t + b_1} + \frac{c_1}{t + c_1}$ , de onde

$$(a_1 + t)(b_1 + t)(c_1 + t) = a_1[t^2 + (b_1 + c_1)t + b_1c_1] + b_1[t^2 + (c_1 + a_1)t + c_1a_1] + c_1[t^2 + (a_1 + b_1)t + a_1b_1];$$

$$t^3 + (a_1 + b_1 + c_1)t^2 + (a_1b_1 + b_1c_1 + c_1a_1)t + a_1b_1c_1 = (a_1 + b_1 + c_1)t^2 + 2(a_1b_1 + b_1c_1 + c_1a_1)t + 3a_1b_1c_1;$$

$$t[t^2 - (a_1b_1 + b_1c_1 + c_1a_1)] = 2a_1b_1c_1 \Rightarrow t \text{ divide a } 2a_1b_1c_1.$$

Como  $ABC$  é acutángulo,  $O$  é interior a  $ABC$  e así  $a_1 < t$ ,  $b_1 < t$ ,  $c_1 < t$ ; polo tanto, ao ser  $t$  primo maior ca  $a_1$ ,  $b_1$  e  $c_1$  e dividir a  $2a_1b_1c_1$ , resulta que  $t$  divide a 2. Como  $t$  é primo,  $t = 2$ , co cal 2 divide a  $2a_1b_1c_1$ , deducíndose disto que  $\frac{1}{a_1b_1c_1}$  é un número enteiro, de onde  $a_1 = b_1 = c_1 = 1$ , sendo polo tanto  $ABC$  equilátero. Pero  $t = 2$  é o raio do círculo circunscrito ao triángulo equilátero  $ABC$ , co cal, se  $a = BC = CA = AB$ , do teorema dos senos en  $ABC$  resulta que  $\frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 2t$ , por ser  $t$  o raio

do círculo circunscrito a  $ABC$ , logo  $a = b = c = 2\sqrt{3}$  é a medida de cada un dos lados do triángulo  $ABC$ .

Problemas de nivel medio e de Olimpiadas (23)

23.5. Se  $c$  é un enteiro positivo, defínese a sucesión  $(a_n)$  mediante

$$a_1 = c; \quad a_{n+1} = ca_n + \sqrt{(c^2 - 1)(a_n^2 - 1)} \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

Demostrar que tódolos  $a_n$  son enteiros positivos.

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, España):

$$(a_{n+1} - ca_n)^2 = \left[ \sqrt{(c^2 - 1)(a_n^2 - 1)} \right]^2;$$

$$a_{n+1}^2 - 2ca_{n+1}a_n + c^2a_n^2 = c^2a_n^2 - c^2 - a_n^2 + 1;$$

$$a_n^2 - 2ca_{n+1}a_n + (a_{n+1}^2 + c^2 - 1) = 0; \quad a_n = \frac{-(-2ca_{n+1}) \pm \sqrt{(-2ca_{n+1})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a_{n+1}^2 + c^2 - 1)}}{2 \cdot 1};$$

$$a_n = \frac{2ca_{n+1} \pm 2\sqrt{(c^2 - 1)(a_{n+1}^2 - 1)}}{2}; \quad a_n = ca_{n+1} \pm \sqrt{(c^2 - 1)(a_{n+1}^2 - 1)};$$

o signo  $+$  non é válido, porque nese caso  $a_n = ca_{n+1} + \sqrt{(c^2 - 1)(a_{n+1}^2 - 1)} (= a_{n+2}) \geq ca_{n+1} > a_{n+1}$ , o cal é contradictorio con que  $a_{n+1} (\geq ca_n) > a_n$ .

Entón  $a_n = ca_{n+1} - \sqrt{(c^2 - 1)(a_{n+1}^2 - 1)}$ ;  $a_n = ca_{n+1} - (a_{n+2} - ca_{n+1})$ ;  $a_n = 2ca_{n+1} - a_{n+2}$ ;  $a_{n+2} = 2ca_{n+1} - a_n$ .

Probarase agora o resultado, a partir destas consideracións e utilizando indución en  $n$ :

1º)  $a_1 = c$  é un enteiro positivo (por hipótese);  $a_2 = c^2 + |c^2 - 1| = 2c^2 - 1$  é un enteiro tamén positivo porque  $a_2 = 2c^2 - 1 \geq 2 \cdot 1^2 - 1 = 1 > 0$ .

2º) Se  $n \geq 1$  e  $a_n$  e  $a_{n+1}$  son enteiros positivos, entón  $a_{n+2} = 2ca_{n+1} - a_n$  é un enteiro (diferenza de enteiros) que é positivo porque  $a_{n+2} = 2ca_{n+1} - a_n \geq 2 \cdot 1 \cdot a_{n+1} - a_n \geq 2a_n - a_n = a_n > 0$ .

# Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoidm/>

Edita:

