XLII Olimpiada Matemática Española

Fase nacional 2006 (Sevilla)

Primera sesión (24 marzo)

Problema 1

Sea *P(x)* un polinomio con coeficientes enteros. Demostrar que si existe un entero k tal que ninguno de los enteros $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ es divisible por k, entonces $P(x)$ no tiene raíces enteras.

Problema 2

Las dimensiones de un paralelepípedo de madera son enteras. Pintamos toda su superficie (las seis caras), lo cortamos en cubos de una unidad de arista y observamos que exactamente la mitad de los pequeños cubos no tienen ninguna cara pintada. Probar que el número de paralelepípedos con tal propiedad es finito.

(Puede resultar útil tener en cuenta que $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 0,79\ldots < 0.8$).

Problema 3

ABC es un triángulo isósceles con $AB = AC$. Sea P un punto cualquiera de la circunferencia tangente a los lados AB en B y a AC en C.
Llamamos a, b y c a las distancias desde P a los lados BC, AC y AB respectivamente. Probar que:

$$a^2 = b \cdot c$$

No está permitido el uso de calculadoras. Cada problema se puntúa sobre 7 puntos. E1 tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.

XLII Olimpiada Matemática Española

Fase nacional 2006 (Sevilla)
Segunda sesión (25 marzo)

Problema 4
Hallar todas las funciones *f* : (O, ∞) -» □ que satisfacen la ecuación

$$f(x)f(y)+f\left(\frac{\lambda}{x}\right)+f\left(\frac{\lambda}{y}\right)=2f(xy)$$

para todo par de números reales *x* e *y* positivos, siendo *A* un número real positivo tal

que $f(\lambda)=1$

Problema *5*
Probar que el producto de cuatro naturales consecutivos no puede ser ni cuadrado ni cubo perfecto.

Problema 6
Las diagonales *AC* y *BD* de un cuadrilátero convexo *ABCD* se cortan en *E*. Denotamos por $S_I S_2$ y *S* a las áreas de los triángulos *ABE*, *CDE y* del cuadrilátero *ABCD* respectivamente.
Prueba que $\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\le\sqrt{S}$.

¿Cuándo se alcanza la igualdad?

No está permitido el uso de calculadoras. Cada problema se puntúa sobre 7 puntos. El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI