Problema 118.
Resolver, en el conjunto de los números reales, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ xy+yz+xz=9 \\ x^3+y^3+z^3=63 \end{array}\right\}$$

Solución.
Elevando al cuadrado la primera y teniendo en cuanta la segunda, resulta $x^2+y^2+z^2=18$.
Multiplicando miembro a miembro las dos primeras ecuaciones, queda

$$3xyz+x^2\left(y+z\right)+y^2\left(x+z\right)+z^2\left(x+y\right)=54$$

y, por la primera, queda

$$3xyz+x^2\left(6-x\right)+y^2\left(6-y\right)+z^2\left(6-z\right)=54$$

operando

$$3xyz+6\left(x^2+y^2+z^2\right)-\left(x^3+y^3+z^3\right)=54$$

sustituyendo los paréntesis por sus valores numéricos resulta finalmente el sistema equivalente

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ xy+yz+xz=9 \\ xyz=3 \end{array}\right\}$$

en virtud de las fórmulas de Cardano-Vieta resolver el sistema es equivalente a resolver la ecuación cúbica:

$$t^3-6t^2+9t-3=0$$

con el cambio $t=u+2$ eliminamos el termino de segundo grado y queda en la forma

$$u^3-3u-1=0 \quad (*)$$

que resolveremos con el procedimiento de Vieta.
Haciendo $u=v+\dfrac{1}{v}$ y operando resulta la ecuación $v^6-v^3+1=0$ que es de segundo grado en la incógnita v^3. Resolviendo en v^3 queda

$$v^3=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos 60^\circ \pm i\operatorname{sen}60^\circ$$

cada solución tiene tres raíces cúbicas que sustituidas en $u=v+\dfrac{1}{v}$ nos dan tres parejas de valores que se repiten para cada una de ellas.
Las tres raíces de (*) sustituidas en $t=u+2$ nos proporcionan la solución final del sistema

$$\left\{\begin{array}{l} x=2\left(1+\cos 20^\circ\right) \\ y=2\left(1+\cos 140^\circ\right) \\ z=2\left(1+\cos 260^\circ\right) \end{array}\right.$$

y las correspondiente permutaciones al ser simétrico el sistema en las tres incógnitas.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI