José Luis **Díaz–Barrero**
Applied Mathematics III
Universitat Politècnica de Catalunya
Jordi Girona 1-3, C2, 08034 Barcelona. Spain
jose.luis.diaz@upc.edu

Problema 119 *Propuesto por el editor.*

Demostrar que las ecuaciones

$$\begin{aligned} ax^3 + 3bx^2 + d &= 0, \\ bx^3 + 3dx^2 + e &= 0 \end{aligned}$$

tiene una raíz común si

$$(ae - 4bd)^3 = 27(ad^2 + b^2e)^2.$$

Solución por José Luis Díaz-Barrero (Barcelona, España)

La resultante de Bezout para las ecuaciones del enunciado es

$$B = \begin{vmatrix} ae - bd & 3eb - 3d^2 & 0 \\ 0 & ae - bd & 3eb - 3d^2 \\ 3ad - 3b^2 & 0 & ae - bd \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= a^3e^3 - 12bda^2e^2 - 6aeb^2d^2 - 64b^3d^3 - 27a^2d^4 - 27e^2b^4 \\ &= (a^3e^3 - 12bda^2e^2 + 48aeb^2d^2 - 64b^3d^3) - 27(a^2d^4 + 2aeb^2d^2 + e^2b^4) \\ &= (ae - 4bd)^3 - 27(ad^2 + eb^2)^2 \end{aligned}$$

Es bien conocido que las ecuaciones dadas tiene una raíz común si su resultante es cero. Por tanto, si $B = 0$ entonces $(ae - 4bd)^3 - 27(ad^2 + eb^2)^2 = 0$ y hemos terminado.

Comentario: En lugar de utilizar la resultante de Bezout podría haberse utilizado la resultante Sylvester:

$$R = \begin{vmatrix} a & 3b & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & a & 3b & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & a & 3b & 0 & d \\ b & 3d & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & b & 3d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & b & 3d & 0 & e \end{vmatrix}.$$

Obviamente se obtiene el mismo resultado pero hay que calcular un determinante de mayor orden.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI