

IX Competición Matemática Mediterránea 2006

Memorial Peter O'Halloran

Requena, Valencia, 29 de abril de 2006

Problema 1

Se colorean todos los puntos del plano con dos colores: rojo y azul. Hay al menos un punto rojo y al menos un punto azul.

¿Es posible que en cada circunferencia de radio 1 cm haya, exactamente,

- i) un punto azul;
- ii) dos puntos azules ?

Problema 2

Sea P un punto interior del triángulo ABC y sean A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 paralelas trazadas por P a los lados AB, BC, CA respectivamente, donde A_1, A_2 son puntos del lado BC , B_1, B_2 puntos del lado AC , y C_1, C_2 puntos del lado AB .

Demostrar que el área del hexágono $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ es mayor o igual que dos tercios del área de ABC .

Problema 3

Los lados a, b, c del triángulo ABC son números naturales tales que el máximo común divisor de a, b y c es igual a 1.

La bisectriz interior del ángulo \hat{A} corta a BC en D .

a) Probar que si ABC es semejante a ABD , entonces c es un cuadrado perfecto.

b) Para todo cuadrado perfecto $c = n^2$, $n > 2$, demostrar que existe un triángulo ABC semejante a ABD .

Problema 4

Sean m, n enteros positivos, y sean $x_{ij} \in [0, 1]$ para todos $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$.

Demostrar que

$$\prod_{j=1}^n \left(1 - \prod_{i=1}^m x_{ij} \right) + \prod_{i=1}^m \left(1 - \prod_{j=1}^n (1 - x_{ij}) \right) \geq 1.$$

Cada problema vale 7 puntos

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revista_oim/

Edita:

