Problema 120

Propuesto por el editor

Demostrar que el cuadrado del diámetro del círculo circunscrito al triángulo formado por las rectas

$$ax^2+2hxy+by^2=0,$$
$$lx+my+1=0,$$

es

$$\frac{\left[(a-b)^2+4h^2\right]\left(l^2+m^2\right)}{\left(am^2-2hlm+bl^2\right)^2}.$$

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Sea un triángulo cualquiera de vértices *A*, *B*, *C*, radio de la circunferencia circunscrita *R* y área *S*. Entonces, es conocido por el teorema del seno que

$$S=\frac{BC\cdot CA\operatorname{sen}(C)}{2}=\frac{BC\cdot CA\cdot AB}{4R};\qquad (2R)^2=\left(\frac{BC\cdot CA\cdot AB}{2S}\right)^2=\frac{BC^2\cdot CA^2\cdot AB^2}{4S^2}.$$

Si $a=b=0$, la primera ecuación se convierte en $xy=0$, con lo que $x=0$, $y=0$ son rectas que contienen a dos de los lados del triángulos. Sus vértices serían los cortes de estas dos rectas con la tercera, es decir, $(0,0)$, $(0,-1/m)$ y $(-1/l,0)$. El triángulo es rectángulo en $(0,0)$, luego el diámetro de su circunferencia circunscrita es igual a la hipotenusa:

$$(2R)^2=\frac{1}{m^2}+\frac{1}{l^2}=\frac{l^2+m^2}{l^2m^2}=\frac{4h^2\left(l^2+m^2\right)}{(2hlm)^2}=\frac{\left[(a-b)^2+4h^2\right]\left(l^2+m^2\right)}{\left(am^2-2hlm+bl^2\right)^2}.$$

En el caso en el que *a* y *b* no sean ambos nulos, siempre podemos elegir que *a* sea no nulo intercambiando los papeles de *x* e *y*. Además, siempre podemos elegir *a* positivo, multiplicando ambos miembros de la primera ecuación por -1. Tenemos entonces dos casos distintos:

i) si *b* tiene el mismo signo que *a* y $h^2<ab$, entonces podemos tomar

$$t=u=\sqrt{\frac{a}{2}},\qquad v=\frac{h-\sqrt{ab-h^2}}{\sqrt{2a}},\qquad w=\frac{h+\sqrt{ab-h^2}}{\sqrt{2a}},$$

en cuyo caso se tiene que

$$t^2+u^2=2\frac{a}{2}=a,\qquad tw+uv=\frac{h+\sqrt{ab-h^2}}{2}+\frac{h-\sqrt{ab-h^2}}{2}=h,$$

$$w^2+v^2=\frac{\left(h+\sqrt{ab-h^2}\right)^2+\left(h-\sqrt{ab-h^2}\right)^2}{2a}=2\frac{ab}{2a}=b,$$

$$(tx+wy)^2+(ux+vy)^2=\left(t^2+u^2\right)x^2+2(tw+uv)xy+\left(w^2+v^2\right)y^2=ax^2+2hxy+by^2.$$

Pero entonces las ecuaciones $tx+wy=0$ y $ux+vy=0$ deben satisfacerse simultáneamente para que se satisfaga la primera ecuación dada, con lo que ésta no define dos rectas, sino un punto (el origen), y no queda definido un triángulo, con lo que no tiene sentido definir el diámetro de su circunferencia circunscrita.

ii) si b tiene signo opuesto al de a (con lo que $ab<0$), o si b es nulo, o si a y b tienen el mismo signo pero $h^2\geq ab$, entonces dando a t un valor real cualquiera y definiendo

$$u=\frac{a}{t},\qquad v=\frac{h-\sqrt{h^2-ab}}{t},\qquad w=\frac{t}{a}\left(h+\sqrt{h^2-ab}\right),$$

se tiene pues que existen reales t, u, v, w tales que

$$tu=a,\qquad vw=\frac{h^2-\left(h^2-ab\right)}{a}=b,\qquad tv+uw=h-\sqrt{h^2-ab}+h+\sqrt{h^2-ab}=2h,$$

$$ax^2+2hxy+by^2=tux^2+(tv+uw)xy+vwy^2=(tx+wy)(ux+vy).$$

Se tiene pues que la primera ecuación define las rectas $tx+wy=0$, $ux+vy=0$, que confluyen en el origen, que es uno de los vértices del triángulo (C sin pérdida de generalidad). Los otros dos vértices son las soluciones de los sistemas

$$\begin{pmatrix} l & m \\ t & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix} l & m \\ u & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Llamando Δ_1 y Δ_2 a los determinantes de las matrices respectivas de ambos sistemas, se tiene, sin pérdida de generalidad, que los otros dos vértices A y B tienen coordenadas

$$A\equiv\left(-\frac{w}{\Delta_1},\frac{t}{\Delta_1}\right),\qquad B\equiv\left(-\frac{v}{\Delta_2},\frac{u}{\Delta_2}\right).$$

Se tiene entonces que las longitudes de los lados son:

$$CA^2=\frac{t^2+w^2}{\Delta_1^{\,2}},\qquad BC^2=\frac{u^2+v^2}{\Delta_2^{\,2}},$$

$$AB^2=\left(\frac{\Delta_2 w-\Delta_1 v}{\Delta_1\Delta_2}\right)^2+\left(\frac{u\Delta_1-t\Delta_2}{\Delta_1\Delta_2}\right)^2=\frac{m^2(tv-uw)^2}{\Delta_1^{\,2}\Delta_2^{\,2}}+\frac{l^2(uw-tv)^2}{\Delta_1^{\,2}\Delta_2^{\,2}}$$

$$=\frac{\left(l^2+m^2\right)(tv-uw)^2}{\Delta_1^{\,2}\Delta_2^{\,2}}.$$

Además, el cuadrado del doble del área se puede escribir como

$$4S^2 = \left|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}\right|^2 = \begin{vmatrix} -\dfrac{w}{\Delta_1} & \dfrac{t}{\Delta_1} \\ -\dfrac{v}{\Delta_2} & \dfrac{u}{\Delta_2} \end{vmatrix}^2 = \frac{(tv-uw)^2}{\Delta_1{}^2\Delta_2{}^2}.$$

Se llega entonces a

$$(2R)^2 = \left(\frac{BC\cdot CA\cdot AB}{2S}\right)^2 = \frac{\dfrac{u^2+v^2}{\Delta_2{}^2}\cdot\dfrac{t^2+w^2}{\Delta_1{}^2}\cdot\dfrac{(l^2+m^2)(tv-uw)^2}{\Delta_1{}^2\Delta_2{}^2}}{\dfrac{(tv-uw)^2}{\Delta_1{}^2\Delta_2{}^2}}$$

$$= \frac{(u^2+v^2)\cdot(t^2+w^2)\cdot(l^2+m^2)}{(\Delta_1\Delta_2)^2}.$$

Pero

$$(u^2+v^2)(t^2+w^2) = t^2u^2+v^2w^2+t^2v^2+u^2w^2 = (tu)^2+(vw)^2-2(tu)(vw)+(tv+uw)^2$$

$$= a^2+b^2-2ab+4h^2 = (a-b)^2+4h^2,$$

$$\Delta_1\Delta_2 = (lw-mt)(lv-mu) = l^2vw+m^2tu-lm(tv+uw) = l^2b+m^2a-2lmh,$$

con lo que

$$(2R)^2 = \frac{\left[(a-b)^2+4h^2\right](l^2+m^2)}{(am^2-2hlm+bl^2)^2},$$

q.e.d..

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI