José Luis **Díaz–Barrero**
Applied Mathematics III
Universitat Politècnica de Catalunya
Jordi Girona 1-3, C2, 08034 Barcelona. Spain
jose.luis.diaz@upc.edu

Problema xxx. *Propuesto por José Luis Díaz-Barrero (Barcelona, España)*

Calcular la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{(-1)^{n+1}+F_{n-1}F_{n+1}}{2^{2n}}\right)$$

siendo F_n el $n-$ésimo número de Fibonacci definido por $F_0=0, F_1=1$ y para todo $n\geq 2, F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$.

Solución por el autor de la propuesta

Teniendo en cuenta la identitdad de Cassini: $F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2=(-1)^n$ (puede probarse fácilmente por inducción) la suma propuesta puede escribirse en la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nF_n^2}{2^{2n}} \tag{1}$$

Para sumar (1) necesitamos probar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^2 x^n = \frac{x(1-x)}{1-2x-2x^2+x^3},\ |x|<\frac{3-\sqrt{5}}{2} \tag{2}$$

En efecto, supongamos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{x(1-x)}{1-2x-2x^2+x^3},$$

entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(1-2x-2x^2+x^3)x^n = x(1-x).$$

Igualando ceoficients de potencias d eigual grado, resulta $a_0=0, a_1=a_2=1$, y $a_n=2a_{n-1}+2a_{n-2}-a_{n-3}$, para $n\geq 3$. Puesto que,

$$\begin{aligned} F_n^2 &= (F_{n-1}+F_{n-2})^2 \\ &= 2F_{n-1}^2+2F_{n-2}^2-(F_{n-1}-F_{n-2})^2 \\ &= 2F_{n-1}^2+2F_{n-2}^2-F_{n-3}^2, \end{aligned}$$

entonces $a_n=F_n^2$ satisface la recurrencia precedente y las tres condiciones iniciales. Además las ríces de la cúbica $1-2x-2x^2+x^3=0$ son $-1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ con lo que la serie (2) converge cuando $|x|<\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Ahora para obtener (1) aplicamos el operador $x\frac{d}{dx}$ a ambos lados de (2) y resulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} nF_n^2 x^n = \frac{x(1-2x+4x^2-2x^3+x^4)}{(1+x)^2(1-3x+x^2)^2}.$$

Finalmente, haciendo $x = \frac{1}{4}$ en la expresión precedente, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nF_n^2}{2^{2n}} = \frac{148}{125}$$

y hemos terminado.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI