Problema 123

Propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumanía

i) Hallar el cardinal $E(n)$, $n\in\mathbf{N}^*$, del conjunto de los números de n cifras, que se escriben solamente con cifras pares.

ii) Hallar el cardinal $O(n)$, $n\in\mathbf{N}^*$, de los números de n cifras, que se escriben solamente con cifras impares.

iii) Hallar $n\in\mathbf{N}^*$ de tal manera que $E(n)+O(n)$, sea cuadrado perfecto.

iv) Sea $H(n)$, $n\in\mathbf{N}^*$, el cardinal del conjunto de los números de n cifras que se pueden formar con los dígitos 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Calcular el máximo común divisor de $H(n)$ y $E(n)+O(n)$.

v) Hallar $n\in\mathbf{N}^*$ tal que

$$\frac{H(n)}{O(n)-E(n)} \equiv 0 (\mathrm{mod} 144).$$

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España.

Nota: he incluido el apartado v) ya que en el enunciado aparecía sólo la ecuación, a la que he dotado del objetivo que intuyo le quería dar originalmente el proponente.

i) De las n cifras de cualquier tal número, todas pueden tomar valores 0,2,4,6,8, salvo la primera, que sólo puede tomar valores 2,4,6,8, luego

$$E(n) = 4\cdot 5^{n-1}.$$

ii) De las n cifras de cualquier tal número, todas pueden tomar valores 1,3,4,7,9, luego

$$O(n) = 5^n = E(n) + 5^{n-1} = 9\cdot 5^{n-1} - E(n).$$

iii) Por el apartado anterior,

$$E(n) + O(n) = 3^2\cdot 5^{n-1},$$

que es cuadrado perfecto si y sólo si lo es 5^{n-1}, y al ser 5 primo, si y sólo si $n-1$ es par, es decir, si y sólo si n es impar.

iv) De las n cifras de cualquier tal número, la primera no puede tomar el valor 0, luego

$$H(n) = 9\cdot 10^{n-1} = 2^{n-1}\left[E(n)+O(n)\right] = 9\cdot 2^{n-1}\left[O(n)-E(n)\right].$$

Al ser $H(n)$ múltiplo de $E(n)+O(n)$, éste último es su máximo común divisor es, es decir,

$$\mathrm{mcd}\left\{H(n), E(n)+O(n)\right\} = E(n)+O(n) = 9\cdot 5^{n-1}.$$

v) Se tiene por el apartado anterior que

$$\frac{H(n)}{O(n)-E(n)}=9\cdot 2^{n-1}=144\cdot 2^{n-5}.$$

El miembro de la derecha será múltiplo de 144 obviamente si y sólo si 2^{n-5} es entero, es decir, si y sólo si $n\geq 5$. Luego

$$\frac{H(n)}{O(n)-E(n)}\equiv 0(\mathrm{mod}\,144)$$

si y sólo si $n\geq 5$.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI