Problema 2 da IX Competición Matemática Mediterránea 2006.
Memorial Peter O´Halloran.

Sexa P un punto interior do triángulo ABC e sexan A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 paralelas trazadas por P aos lados AB, BC, CA respectivamente, onde A_1, A_2 son puntos do lado BC, B_1, B_2 puntos do lado AC, e C_1, C_2 puntos do lado AB.

Demostrar que a área do hexágono $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ é maior ou igual ca dous terzos da área de ABC.

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, Lugo; España)

Denotarase a área como $[\ldots]$.

Proposición: $[A_1A_2B_1B_2C_1C_2]=\frac{1}{2}[ABC]+\frac{1}{2}([PA_1A_2]+[PB_1B_2]+[PC_1C_2])$.

Demostración:

Ao ser a área dun paralelogramo o dobre da de calquera dos triángulos que teñen dous dos seus lados consecutivos nel (e o terceiro lado a correspondente diagonal), resulta que

$$[A_1A_2B_1B_2C_1C_2]=[ABC]-([AC_1B_2]+[BA_1C_2]+[CB_1A_2])=[ABC]-\left(\frac{1}{2}[AC_1PB_2]+\frac{1}{2}[BA_1PC_2]+\frac{1}{2}[CB_1PA_2]\right)$$

$$=[ABC]-\frac{1}{2}\{[ABC]-([PA_1A_2]+[PB_1B_2]+[PC_1C_2])\}=\frac{1}{2}[ABC]+\frac{1}{2}([PA_1A_2]+[PB_1B_2]+[PC_1C_2]).$$

Corolario: O problema dado é equivalente ao problema proposto 90 desta revista. Ademais, dase a igualdade se e só se P é o baricentro de ABC.

Demostración:

$$[A_1A_2B_1B_2C_1C_2]\geq\frac{2}{3}[ABC]\underset{\text{Proposición}}{\Leftrightarrow}\frac{1}{2}[ABC]+\frac{1}{2}([PA_1A_2]+[PB_1B_2]+[PC_1C_2])\geq\frac{2}{3}[ABC]$$

$$\Leftrightarrow[PA_1A_2]+[PB_1B_2]+[PC_1C_2]\geq\frac{1}{3}[ABC].$$

Logo ámbolos dous problemas son equivalentes. Engadindo esto ao feito de que, na solución do problema proposto 90 desta revista foi probado que a igualdade se daba se e só se P era o baricentro de ABC, resulta que o problema dado está resolto e nel tamén se dará a igualdade nese único caso.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: