Problema 122

Sean *a; b; c* los lados de un triángulo acutángulo *ABC* con semiperímetro *s*:

Demostrar que $\left(\dfrac{a}{s}\right)^3 \sec A + \left(\dfrac{b}{s}\right)^3 \sec B + \left(\dfrac{c}{s}\right)^3 \sec C \geq \dfrac{16}{9}$

Solución.

Al ser el triángulo acutángulo, cos *A*, cos *B*, cos *C* y sus inversos son positivos.

Por la desigualdad de las medias,

$$\left(\frac{a}{s}\right)^3 \sec A + \left(\frac{b}{s}\right)^3 \sec B + \left(\frac{c}{s}\right)^3 \sec C \geq \frac{abc}{s^3} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C}} \quad (1),$$

como $\dfrac{a}{s}+\dfrac{b}{s}+\dfrac{c}{s}=\dfrac{a+b+c}{s}=\dfrac{2s}{s}=2$, $\dfrac{abc}{s^3}=\dfrac{a}{s}\cdot\dfrac{b}{s}\cdot\dfrac{c}{s}$ es el producto de tres números positivos con suma constante y es sabido que alcanza su mínimo cuando son iguales; por tanto

$$\frac{abc}{s^3} \Rightarrow\geq \frac{a^3}{\frac{27}{8}a^3} = \frac{8}{27} \quad (2).$$

De otra parte desde la desigualdad clásica $\cos A + \cos B + \cos C \leq \dfrac{3}{2}$ y de nuevo por la desigualdad de las medias aplicada a los números positivos cos *A*, cos *B*, cos *C*, resulta

$$\frac{3}{2} \geq \cos A + \cos B + \cos C \geq 3\sqrt[3]{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C}\,,$$

que se puede escribir

$$\sqrt[3]{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt[3]{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C}} \geq 6 \quad (3)\,;$$

llevando (2) y (3) a (1)

$$\left(\frac{a}{s}\right)^3 \sec A + \left(\frac{b}{s}\right)^3 \sec B + \left(\frac{c}{s}\right)^3 \sec C \geq \frac{8}{27} \cdot 6 = \frac{16}{9}$$

y hemos terminado.

Nota. El signo “=” del enunciado es válido si y sólo si el triángulo es equilátero ya que todas las desigualdades manejadas se convierten en igualdades si y sólo si el triángulo es equilátero.

Cristóbal Sánchez-Rubio
I.E.S. Penyagolosa, Castellón.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI