Problema 125

Si *a; b; c* son estrictamente positivos, demostrar que

$$abc \le \sqrt{\frac{\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)}{3}} \le \frac{1}{3}\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$$

Solución.
Aplicando la desigualdad MAG a los números a^2b, b^2c, c^2a ; obtenemos

$$\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{3} \ge \sqrt[3]{a^3b^3c^3}$$

que operada queda en la forma

$$a^2b+b^2c+c^2a \ge 3abc \quad (1)$$

multiplicando los dos miembros de (1) por abc y despejando abc resulta

$$abc \le \sqrt{\frac{abc\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)}{3}}$$

que es la desigualdad de la izquierda.
Si ahora multiplicamos los dos miembros de (1) por $a^2b+b^2c+c^2a$ y dividimos por 9 resulta

$$\frac{\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)^2}{9} \ge \frac{abc\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)}{3}$$

y extrayendo la raíz cuadrada resulta la desigualdad de la derecha:

$$\sqrt{\frac{\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)}{3}} \le \frac{1}{3}\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI