

Problemas para os máis novos (REOIM, nº 24)

24.1. Demostrar que para todo número natural $n > 1$, o número

$$\sqrt{11 \cdots 144 \cdots 4},$$

onde a cifra 1 aparece n veces, e a cifra 4 aparece $2n$ veces, é irracional.

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, Lugo; España)

Denotarase como $1_n 4_{2n}$ (que indica que primeiro aparece a cifra 1, que se repite n veces e que despois vén a cifra 4, que se repite $2n$ veces) o radicando do enunciado, e análogas notacións para outros números que aparecerán na seguinte solución:

Proposición 1: $1_n 4_{2n} = (10^n + 2)^2 \cdot 1_n$.

Demostración:

Atendendo á escritura en base 10 do radicando e á fórmula da suma de varios termos dunha progresión xeométrica, a que $x^3 + 3x^2 - 4 = (x + 2)^2 \cdot (x - 1)$ e a que $10^n - 1 = 10_n - 1 = 9_n = 9 \cdot 1_n$ resulta que

$$\begin{aligned} 1_n 4_{2n} &= 4 + 4 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^2 + \dots + 4 \cdot 10^{2n-1} + 1 \cdot 10^{2n} + 1 \cdot 10^{2n+1} + 1 \cdot 10^{2n+2} + \dots + 1 \cdot 10^{3n-1} \\ &= 4 \cdot \frac{10^{2n-1} \cdot 10 - 1}{10 - 1} + \frac{10^{3n-1} \cdot 10 - 10^{2n}}{10 - 1} = \frac{1}{9} \cdot (10^{3n} + 4 \cdot 10^{2n} - 10^{2n} - 4) = \frac{1}{9} \cdot [(10^n)^3 + 3 \cdot (10^n)^2 - 4] \\ &= (10^n + 2)^2 \cdot \frac{1}{9} \cdot (10^n - 1) = (10^n + 2)^2 \cdot 1_n. \end{aligned}$$

Corolario 1: $\sqrt{1_n 4_{2n}}$ é irracional se e só se $\sqrt{1_n}$ é irracional.

Demostración:

Pola proposición 1, $\sqrt{1_n 4_{2n}} = \sqrt{(10^n + 2)^2 \cdot 1_n} = (10^n + 2) \cdot \sqrt{1_n}$; como $10^n + 2$ é racional e o produto dun racional por outro número real é irracional se e só se dito número o é, está probado este corolario 1.

Proposición 2: 1_n non é un cadrado perfecto.

Demostración:

Por redución ao absurdo: Se existise m natural tal que $1_n = m^2$, dividindo m entre 4 teranse un cociente c e un resto r tales que $m = 4 \cdot c + r$ e $r \in \{0,1,2,3\}$. Así,

$$\text{Por tanto, } 1_n = \begin{cases} 4c', & \text{se } r = 0 \\ 4c' + 1, & \text{se } r = 1 \\ 4(c' + 1) = 4c'', & \text{se } r = 2 \\ 4(c' + 2) + 1 = 4c''' + 1, & \text{se } r = 3 \end{cases}, \text{ logo } 1_n \equiv 0 \pmod{4} \text{ (se } r \text{ é par) ou}$$

$$1_n \equiv 1 \pmod{4} \text{ (se } r \text{ é impar).}$$

Pero iso contradí o feito de que $1_n = 1_{n-2}08 + 3 = 4 \cdot 27_{n-2} + 3 \equiv 3 \pmod{4}$, contradición que proba esta proposición 2.

Corolario 2: $\sqrt{1_n}$ é irracional.

Demostración:

Por redución ao absurdo: Se $\sqrt{1_n}$ fose racional, entón $\sqrt{1_n} = \frac{r}{s}$ para algúns naturais r e s , podendo supoñerse ademais que $(r, s) = 1$ sen máis que factorizar r e s e simplificar o máximo de factores primos do numerador e denominador da fracción $\sqrt{1_n}$.

Así, $1_n = \frac{r^2}{s^2}$, logo $s^2 \cdot 1_n = r^2$, co cal 1_n divide a r^2 .

Sexa $1_n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ a factorización de 1_n en produto de primos p_i , con α_i naturais, $\alpha_i > 0$. Pola proposición 2, non pode ocorrer que tódolos α_i sexan múltiplos de 2 (pois nese caso $1_n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} = p_1^{2\beta_1} \cdot p_2^{2\beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{2\beta_k} = (p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k})^2$, un cadrado perfecto), logo algún dos α_i , sexa este α_{i_0} , non é múltiplo de 2.

Como 1_n divide a r^2 e $1_n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, con p_i primos, tense que tódolos $p_i^{\alpha_i}$ dividen a r^2 ; en particular, $p_{i_0}^{\alpha_{i_0}}$ tamén, logo p_{i_0} divide a r^2 e polo tanto p_{i_0} divide a r . Desto último e do feito de que p_{i_0} é primo, dedúcese que p_{i_0} é un dos factores na factorización de r en produto de primos, co cal existen γ_{i_0} e t naturais, sendo $\gamma_{i_0} > 0$ o expoñente que lle corresponde ao primo p_{i_0} en tal factorización, con $r = p_{i_0}^{\gamma_{i_0}} \cdot t$, cumpríndose por tanto tamén que $(t, p_{i_0}) = 1$. Ademais, $1_n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_{i_0}^{\alpha_{i_0}} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ divide a $r^2 = p_{i_0}^{2\gamma_{i_0}} \cdot t^2$, con p_i primos, logo $\alpha_{i_0} \leq 2\gamma_{i_0}$; como α_{i_0} non é múltiplo de 2, desta desigualdade dedúcese que $\alpha_{i_0} < 2\gamma_{i_0}$.

Entón $s^2 \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_{i_0}^{\alpha_{i_0}} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} (= s^2 \cdot 1_n = r^2) = p_{i_0}^{2\gamma_{i_0}} \cdot t^2$,

co cal, dividindo entre $p_{i_0}^{\alpha_{i_0}}$ os dous membros da igualdade, obtense que

$s^2 \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_{i_0-1}^{\alpha_{i_0-1}} \cdot p_{i_0+1}^{\alpha_{i_0+1}} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} = p_{i_0}^{2\gamma_{i_0} - \alpha_{i_0}} \cdot t^2$ e como $2\gamma_{i_0} - \alpha_{i_0} > 0$, resulta que o primo p_{i_0} deberá dividir a $s^2 \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_{i_0-1}^{\alpha_{i_0-1}} \cdot p_{i_0+1}^{\alpha_{i_0+1}} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$; ao ser tódolos p_i , con $i \neq i_0$, primos diferentes do p_{i_0} , só queda a posibilidade de que p_{i_0} divida ao natural s^2 do produto anterior; polo tanto, p_{i_0} debe dividir a s .

Polo tanto, p_{i_0} divide a r e p_{i_0} divide a s , co cal p_{i_0} debe dividir ao máximo común divisor de r e s , que é 1. Pero esto último é imposible, porque p_{i_0} é un número primo. Esta contradición finaliza a demostración deste corolario 2, que era o que se pedía probar.

Nota: Unha demostración similar a esta vale para probar que, dados u e v naturais tales que v non sexa unha u -potencia dun número natural, o número $\sqrt[u]{v}$ é irracional.

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revista_oim/

Edita:

