Problemas de nivel medio y de Olimpiadas (26)

Problemas de la segunda fase de la Olimpiada Británica 2005

26-1: N es un entero positivo. Hay exactamente 2005 pares ordenados (x, y)de enteros positivos x, y tales que

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{N}.$$

Demostrar que N es un cuadrado perfecto.

26-2: En el triángulo ABC, $\widehat{BAC}=120^o$. Las bisectrices interiores de los ángulos A,B y C cortan a los lados opuestos en D, E y F, respectivamente. Demostrar que la circunferencia de diámetro EF pasa por D.

26-3: Sean a, b, c números reales positivos. Demostrar que

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

26-4: Sea $X=\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un conjunto de subconjuntos de $\{1,2,\ldots,36\}$, de tres elementos distintos cada uno, tal que

i) $A_i \cap A_j \neq \varnothing$ para todos i, j.

ii) la intersección de todos los elementos de X es el conjunto vacío.

Demostrar que $n \leq 100$. ¿Cuántos conjuntos X hay si $n=100$?

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI