**Problemas para los más jóvenes (24.2).**

**Un conjunto $M$ de cuatro números naturales se dice *ligado*, si para todo elemento $x \in M$, al menos uno de los números $x-1$ y $x+1$ pertenece a $M$.**

**Sea $U_n$ el número de subconjuntos *ligados* del conjunto {1,2,...,n}.**

**a) Calcular $U_7$.**

**b) Determinar el menor número $n$ tal que $U_n \geq 2006$.**

**Solución:**

Denotemos por $K_n$ al subconjunto $\{1, 2, \cdots, n\}$. Entonces $K_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

- Calculamos en primer lugar el número de subconjuntos ligados de $K_7$ que contienen al número 1. Por definición de ligado, obligatoriamente cada uno de estos subconjuntos debe contener al 2.
  Si también contiene al 3, entonces el cuarto número debe ser el 4, pues si fuese uno más grande, ni el anterior ni el posterior pertenecerían al subconjunto y éste no sería ligado.
  Si no contiene al 3 y sí al 4, el cuarto número deberá ser el 5, por el mismo razonamiento anterior.

- Una vez contados todos aquellos subconjuntos ligados que contienen al 1, seguimos con todos aquellos que no contienen al 1 empezando con los que poseen al 2, y así sucesivamente (hasta que sólo nos queden cuatro números) siguiendo el mismo esquema de razonamiento.

Para $K_7$ se obtiene la siguiente tabla, en la que se muestran todos los subconjuntos ligados, con sus elementos ordenados de menor a mayor.

| Empezando por 1 | Empezando por 2 | Empezando por 3 | Empezando por 4 |
|---|---|---|---|
| {1, 2, 3, 4} | {2, 3, 4, 5} | {3, 4, 5, 6} | {4, 5, 6, 7} |
| {1, 2, 4, 5} | {2, 3, 5, 6} | {3, 4, 6, 7} | |
| {1, 2, 5, 6} | {2, 3, 6, 7} | | |
| {1, 2, 6, 7} | | | |

Deducimos, pues, $U_7 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

Para resolver el apartado b), conjeturamos $U_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-4) + (n-3) = \frac{(n-3)(n-2)}{2}$.

Y, en efecto, podemos construir una tabla análoga a la anterior:

| Empezando por 1 | Empezando por 2 | ... | Empezando por $n-3$ |
|---|---|---|---|
| {1, 2, 3, 4} | {2, 3, 4, 5} | ... | $\{n-3, n-2, n-1, n\}$ |
| {1, 2, 4, 5} | {2, 3, 5, 6} | ... | |
| ... | ... | ... | |
| $\{1, 2, n-1, n\}$ | $\{2, 3, n-1, n\}$ | ... | |
| $n-3$ subconjuntos | $n-2$ subconjuntos | ... | 1 subconjunto |

Sólo nos queda calcular $n$ para que $U_n \geq 2006$.

$$2006 \leq U_n = \frac{(n-3)(n-2)}{2} \Leftrightarrow (n-3)(n-2) \geq 4012 \Leftrightarrow n^2 - 5n - 4006 \geq 0.$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado, obtenemos $n \geq 66$.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI