Problema 131

Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España

Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left\{\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2+\sqrt{k^4+n^4}}{n^2}\right)^k\right\}^{\frac{1}{n^2}}$$

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España.

Generalizaremos el problema para hallar el límite

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left\{\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\rho^2k^2+\sqrt{\rho^4k^4+n^4}}{n^2}\right)^k\right\}^{\frac{\rho^2}{n^2}},$$

siendo ρ un real positivo cualquiera, y luego lo particularizaremos para el caso ρ=1. En primer lugar, utilizamos conocidas relaciones de logaritmos para escribir el límite como

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left\{\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\rho^2k^2+\sqrt{\rho^4k^4+n^4}}{n^2}\right)^k\right\}^{\frac{\rho^2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\rho^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\ln\left(\frac{\rho^2k^2+\sqrt{\rho^4k^4+n^4}}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho}{n}\left(\frac{\rho k}{n}\right)\ln\left(\left(\frac{\rho k}{n}\right)^2+\sqrt{\left(\frac{\rho k}{n}\right)^4+1}\right).$$

Ahora bien, podemos identificar el último término como la suma de Riemann de la integral entre 0 y ρ de la siguiente función:

$$f(x) = x\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right),$$

donde se ha dividido el intervalo $(0,\rho)$ en n subintervalos de longitud ρ/n, y se ha evaluado la función $f(x)$ en el extremo superior de cada subintervalo. Se tiene entonces que el límite pedido es igual a

$$\int_0^{\rho} f(x)\,dx = \int_0^{\rho} x\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\rho}}\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)dy,$$

donde se ha realizado el cambio de variable $y=x^2$. Si ahora hacemos además el cambio de variable

$$y = \operatorname{senh}(z), \qquad dy = \cosh(z)\,dz,$$

$$y+\sqrt{y^2+1} = \operatorname{senh}(z)+\sqrt{\operatorname{senh}^2(z)+1} = \operatorname{senh}(z)+\cosh(z) = e^z,$$

se tiene que el límite pedido es

$$\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\rho}} \ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)dy = \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arcsenh}\left(\sqrt{\rho}\right)} z\cosh(z)\,dz\,.$$

Al ser la función senh(z) siempre estrictamente creciente salvo para z=0, el extremo superior de la integral es un real positivo bien determinado. Podemos finalmente integrar por partes:

$$\int_0^{\kappa} z\cosh(z)\,dz = \int_0^{\kappa} z\frac{e^z+e^{-z}}{2}dz = z\frac{e^z-e^{-z}}{2}\bigg|_0^{\kappa} - \int_0^{\kappa}\frac{e^z-e^{-z}}{2}dz$$

$$= \kappa\operatorname{senh}(\kappa) - \frac{e^z+e^{-z}}{2}\bigg|_0^{\kappa} = \kappa\operatorname{senh}(\kappa)-\cosh(\kappa)+1;$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arcsenh}\left(\sqrt{\rho}\right)} z\cosh(z)\,dz = \frac{\sqrt{\rho}\operatorname{arcsenh}\left(\sqrt{\rho}\right)-\sqrt{1+\rho}+1}{2},$$

y este es el límite general pedido. Podemos calcular el arcoseno hiperbólico como sigue:

$$\frac{e^{\kappa}-e^{-\kappa}}{2}=\sqrt{\rho}\,;\qquad e^{2\kappa}-2\sqrt{\rho}e^{\kappa}-1=0\,;\qquad e^{\kappa}=\frac{2\sqrt{\rho}\pm\sqrt{4\rho+4}}{2}=\sqrt{\rho}\pm\sqrt{\rho+1}\,.$$

Como el resultado con signo negativo no tiene sentido, ya que $e^{\kappa}>0$ con κ real, se llega a

$$\operatorname{arcsenh}\left(\sqrt{\rho}\right)=\ln\left(\sqrt{\rho}+\sqrt{\rho+1}\right),$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left\{\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\rho^2k^2+\sqrt{\rho^4k^4+n^4}}{n^2}\right)^k\right\}^{\frac{\rho^2}{n^2}} = \frac{\sqrt{\rho}\ln\left(\sqrt{\rho}+\sqrt{\rho+1}\right)-\sqrt{1+\rho}+1}{2}\,.$$

En el caso particular de que ρ=1, se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left\{\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2+\sqrt{k^4+n^4}}{n^2}\right)^k\right\}^{\frac{1}{n^2}} = \frac{\operatorname{arcsenh}(1)+1-\sqrt{2}}{2} = \ln\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\,.$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: