PROBLEMA 132

Propuesto por: José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.

Sean $x_1, x_2, ..., x_n$ números reales dados. Para todo $n \geq 1$, demostrar que:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\sin x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\cos x_k\right) \leq \frac{(n+1)(n+2)}{12}$$

Donde T_K es el k-esimo numero triangular, definido por $T_k = \dfrac{k(k+1)}{2}$. $k \geq 1$.

SOLUCION DE: DANIEL DARIO GONGORA GARCIA.
Carabayllo, Lima, PERU.
mastermath2004@hotmail.com

Se tiene la desigualdad de Cauchy:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)$$

Y hacemos:

$$1° \quad \begin{cases} a_k = \sqrt{T_k} \\ b_k = \sin x_k \end{cases} \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\sin x_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n}T_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\sin^2 x_k\right) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (1)$$

$$2° \quad \begin{cases} a_k = \sqrt{T_k} \\ b_k = \cos x_k \end{cases} \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\cos x_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n}T_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\cos^2 x_k\right) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (2)$$

Sumando (1) y (2) obtenemos:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\sin x_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\cos x_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n}T_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}1\right) = n\sum_{k=1}^{n}T_K = n\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}$$

$$= \frac{n}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2 + \sum_{k=1}^{n}k\right)$$

$$= \frac{n}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= \frac{n^2(n+1)(n+2)}{6}$$

Por lo tanto:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\sin x_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\cos x\right)^2 \leq \frac{n^2(n+1)(n+2)}{6} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

De otro lado, aplicando M.A.$\geq$M.G.

$$\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\sin x_k\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\cos x_k\right)^2}{2}\geq\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\sin x_k\right)^2\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\cos x_k\right)^2}$$

$$\Rightarrow\qquad 2\left|\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\sin x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\cos x_k\right)\right|\leq\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\sin x_k\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\cos x_k\right)^2\;\ldots.(\beta)$$

Relacionando $(\alpha)\wedge(\beta)$ obtenemos:

$$2\left|\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\sin x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\cos x_k\right)\right|\leq\frac{n^2(n+1)(n+2)}{6}$$

$$\Rightarrow\qquad -\frac{(n+1)(n+2)}{12}\leq\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\sin x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\cos x_k\right)\leq\frac{(n+1)(n+2)}{12}$$

Tomando la parte derecha de la desigualdad obtenemos que:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\sin x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\cos x_k\right)\leq\frac{(n+1)(n+2)}{12}$$

Q.E.D.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI