PROBLEMA 133 – REVISTA DE LA O.E.I.

ENUNCIADO

Probar que si $a \geq b > 0$, y $\lambda > 0$, entonces se verifica $(\lambda+1)b^2 - a^2 \leq \lambda ab \leq \lambda a^2$. ¿Cuándo se alcanza la igualdad?

SOLUCIÓN

Es inmediato que $\lambda b^2 \leq \lambda ab \leq \lambda a^2$.

$(\lambda+1)b^2 - a^2 = \lambda b^2 + (b^2 - a^2) \leq \lambda ab + (b^2 - a^2)$. $b \leq a \Rightarrow b^2 \leq a^2$ porque $a \geq b > 0$. Por lo tanto, $b^2 - a^2 \leq 0$. Luego $\lambda ab + (b^2 - a^2) \leq \lambda ab$.

Es consecuencia entonces que $(\lambda+1)b^2 - a^2 \leq \lambda ab \leq \lambda a^2$.

$\lambda ab = \lambda a^2$ si y sólo si $a = b$.

Supóngase $(\lambda+1)b^2 - a^2 = \lambda ab$. Es sabido que $(\lambda+1)b^2 - a^2 \leq \lambda ab + (b^2 - a^2)$. Luego $\lambda ab \leq \lambda ab + (b^2 - a^2) \Rightarrow 0 \leq b^2 - a^2 \Rightarrow a^2 \leq b^2$. Como se cumplen a la vez $a^2 \geq b^2$ y $a^2 \leq b^2$, es inmediato que $a^2 = b^2$. Por ser a y b estrictamente positivos, se concluye que $a = b$.

Por lo tanto, para que se cumpla la igualdad, deben ser iguales los términos a y b.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI