Problema 134

Propuesto por el editor

Sean O, I, H el circuncentro, incentro y ortocentro, respectivamente, del triángulo ABC. Conocidos los lados del triángulo OIH, determinar los lados del triángulo ABC.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España.

Se utilizarán en la resolución del problema las siguientes relaciones:

$$p = 8R\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right),$$

$$\frac{r}{R} = 4\,\mathrm{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{C}{2}\right) = \cos(A)+\cos(B)+\cos(C)-1,$$

$$\cos(A)\cos(B)\cos(C) = \frac{p^2-4(2R+r)^2}{16R^2},$$

donde R y r son los radios respectivos de las circunferencias circunscrita e inscrita a ABC, y p es el perímetro del triángulo. La primera se puede demostrar aplicando el teorema del seno y conocidas relaciones trigonométricas:

$$\frac{p}{2R} = \mathrm{sen}(A)+\mathrm{sen}(B)+\mathrm{sen}(C) = 2\cos\left(\frac{C}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right].$$

La segunda requiere la anterior, y conocidas expresiones del área S de ABC:

$$\frac{r}{R} = \frac{2S}{Rp} = \frac{abc}{2R^2p} = \frac{\mathrm{sen}(A)\,\mathrm{sen}(B)\,\mathrm{sen}(C)}{2\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)} = 4\,\mathrm{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right] = \cos(A)+\cos(B)+\cos(C)-1.$$

La última se puede obtener a partir de

$$[1+\cos(A)][1+\cos(B)][1+\cos(C)] = \frac{p^3(p-2a)(p-2b)(p-2c)}{8a^2b^2c^2} = \frac{2p^2S^2}{a^2b^2c^2} = \frac{p^2}{8R^2}$$

$$[1-\cos(A)][1-\cos(B)][1-\cos(C)] = \frac{(p-2a)^2(p-2b)^2(p-2c)^2}{8a^2b^2c^2} = \frac{32S^4}{a^2b^2c^2p^2}$$

$$= \frac{r^2}{2R^2},$$

donde se ha utilizado otra conocida expresión del área del triángulo. Entonces,

$$\frac{p^2}{16R^2} - \frac{r^2}{4R^2} = \left(\frac{r}{R}+1\right) + \cos(A)\cos(B)\cos(C).$$

Una vez que disponemos de estas relaciones, podemos pasar a expresar las longitudes de los lados de *OIH* en función de *R*, *r* y *p*. En el caso de *OI*, es conocido que

$$OI^2 = R^2 - 2Rr,$$

que se obtiene aplicando el teorema de la potencia a *I* con respecto a la circunferencia circunscrita a *ABC*. De forma similar hallaremos *OH*. Para ello, consideremos el punto *A*' donde *AH* corta de nuevo a la circunferencia circunscrita a *ABC*. Entonces,

$$HA = \frac{c\cos(A)}{\operatorname{sen}(A+B)} = 2R\cos(A), \qquad HA' = 2BH\cos(C) = 4R\cos(B)\cos(C),$$

$$OH^2 = R^2 - HA\cdot HA' = R^2 - 8R^2\cos(A)\cos(B)\cos(C) = R^2 + 2(2R+r)^2 - \frac{p^2}{2}.$$

La primera igualdad se halla aplicando el teorema del seno, teniendo en cuenta que $\angle HBA=\pi/2-A$, $\angle AHB=A+B$, mientras que la segunda es un ejercicio de simple trigonometría una vez que se constata que $\angle CBA'=\angle CAA'=\angle HBC=\pi/2-C$.

Finalmente, para hallar *IH*, supondremos sin pérdida de generalidad que $B\geq C$. Luego

$$\angle IAH = \angle CAB - \angle CAI - \angle HAB = A - \frac{A}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \frac{B-C}{2}.$$

Aplicando el teorema del coseno se obtiene entonces

$$\begin{aligned}
\frac{2IA\cdot HA\cos(\angle IAH)}{4R^2} &= 4\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right)\cos(A)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) \\
&= 2\cos(A)\cos^2\left(\frac{B-C}{2}\right) - 2\cos(A)\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) \\
&= \cos(A)\left[1+\cos(B-C)\right] - \cos(A)\left[\cos(B)+\cos(C)\right] \\
&= \cos(A)\left[1-\cos(B)\right]\left[1-\cos(C)\right] + \cos(A)\operatorname{sen}(B)\operatorname{sen}(C);
\end{aligned}$$

$$\frac{IA^2}{4R^2} = \left[2\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right)\right]^2 = 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{B}{2}\right)2\operatorname{sen}^2\left(\frac{C}{2}\right) = \left[1-\cos(B)\right]\left[1-\cos(C)\right];$$

$$\begin{aligned}
IH^2 &= HA^2 + IA^2 - 2IA\cdot HA\cos(\angle IAH) = 4R^2\cos^2(A) + 4R^2\left[1-\cos(B)\right]\left[1-\cos(C)\right] \\
&\quad -4R^2\cos(A)\left[1-\cos(B)\right]\left[1-\cos(C)\right] - 4R^2\cos(A)\operatorname{sen}(B)\operatorname{sen}(C) \\
&= 4R^2\left[1-\cos(A)\right]\left[1-\cos(B)\right]\left[1-\cos(C)\right] - 4R^2\cos(A)\cos(B)\cos(C) \\
&= 2r^2 + (2R+r)^2 - \frac{p^2}{4}.
\end{aligned}$$

Podemos ahora despejar *R*, *r* y *p* en función de las longitudes de los lados de *OIH*:

$$OH^2 - 2IH^2 = R^2 - 4r^2 = 2R(R-2r) - (R-2r)^2 = 2OI^2 - \frac{OI^4}{R^2};$$

$$R=\frac{OI^2}{\sqrt{2OI^2-OH^2+2IH^2}};$$

$$r=\frac{R^2-OI^2}{2R}=\frac{OH^2-OI^2-2IH^2}{2\sqrt{2OI^2-OH^2+2IH^2}};$$

$$p^2=2R^2+4\left(2R+r\right)^2-2OH^2=\frac{2OI^4+\left(3OI^2+OH^2-2IH^2\right)^2}{2OI^2-OH^2+2IH^2}-2OH^2$$

$$=\frac{27OI^4-10OI^2\left(2OI^2-OH^2+2IH^2\right)+\left(2OI^2-OH^2+2IH^2\right)^2}{2OI^2-OH^2+2IH^2}-2OH^2$$

$$=\frac{27OI^4}{2OI^2-OH^2+2IH^2}-8OI^2-3OH^2+2IH^2=27R^2-8OI^2-3OH^2+2IH^2$$

Ahora bien, los lados del triángulo son las raíces de la ecuación cúbica

$$x^3-\left(a+b+c\right)x^2+\left(ab+bc+ca\right)x-abc=0.$$

Las ecuaciones de este tipo se resuelven de forma habitual mediante cambio de variable:

$$y=x-\frac{p}{3},\qquad y^3-3\alpha y-2\beta=0,$$

$$\alpha=\frac{p^2-3\left(ab+bc+ca\right)}{9},\qquad \beta=\frac{27abc+2p^3-9\left(ab+bc+ca\right)p}{54}.$$

Las soluciones son entonces

$$x=\frac{p}{3}+2\sqrt{\alpha}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right),\qquad x=\frac{p}{3}+2\sqrt{\alpha}\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right),\qquad x=\frac{p}{3}+2\sqrt{\alpha}\cos\left(\frac{\theta-2\pi}{3}\right),$$

donde

$$\cos\left(\theta\right)=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^3}}.$$

Ahora bien, podemos simplificar las expresiones para α y β. Para ello, observamos que

$$4\left(ab+bc+ca\right)-p^2=2\left(ab+bc+ca\right)-\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$=2ab\left(1-\cos\left(C\right)\right)+2bc\left(1-\cos\left(A\right)\right)+2ca\left(1-\cos\left(B\right)\right)$$

$$=64R^2\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right)\left[\operatorname{sen}\left(\frac{A+B+C}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right)\right]$$

$$=16Rr+4r^2;$$

$$9\alpha=\frac{p^2}{4}-12Rr-3r^2=4R^2-8Rr-IH^2=4OI^2-IH^2;$$

$$\frac{54\beta}{p}=\frac{108RS}{p}+2p^2-36Rr-9r^2-\frac{9p^2}{4}=\left(2R+r\right)^2-\frac{p^2}{4}-4R^2+14Rr-10r^2$$

$$=3OH^2-5IH^2-7OI^2;$$

$$\cos(\theta)=\frac{3OH^2-5IH^2-7OI^2}{\left(4OI^2-IH^2\right)\sqrt{\left(4OI^2-IH^2\right)}}\frac{p}{2}.$$

Por lo tanto, el problema está solucionado, pues podemos hallar p en función de los lados de *OIH*, quedando entonces tanto α como θ determinados por los lados de *OIH*, pudiendo entonces hallarse las longitudes de los lados de *ABC*.

Nota 1: El anterior método de resolución de la ecuación cúbica es válido y produce soluciones reales si y sólo si, bien $\alpha=\beta=0$, bien $\alpha>0$. Pero en nuestro caso siempre se da una de las dos condiciones, pues

$$9\alpha=a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca),$$

que es mayor o igual que 0 en virtud de la desigualdad del producto escalar, siendo nulo si y sólo si $a=b=c$, en cuyo caso es trivial comprobar que $\beta=0$.

Nota 2: Las relaciones halladas causan indeterminación cuando $IH=2OI$, o cuando todos *OIH* queda degenerado a un punto. En el segundo caso, no podemos hallar las longitudes de los lados del triángulo, simplemente deducir que es equilátero. En el primer caso, $\alpha=0$, que como se ha visto en la nota 1 implica que el triángulo es equilátero. Luego en todo otro caso existe una única solución (salvo permutaciones en el orden de los lados del triángulo).

Ejemplo: Sean

$$OI=\frac{\sqrt{5}}{2},\qquad OH=\frac{5}{2},\qquad IH=\sqrt{2}.$$

Entonces, la resolución del triángulo *ABC* sería como sigue:

$$\alpha=\frac{4OI^2-IH^2}{9}=\frac{5-2}{9}=\frac{1}{3},$$

$$p^2=\frac{27\frac{25}{16}}{\frac{5}{2}-\frac{25}{4}+4}-10-3\frac{25}{4}+4=\frac{675-99}{4}=144=12^2;$$

$$\frac{9\beta}{2}=\frac{54\beta}{p}=3OH^2-5IH^2-7OI^2=\frac{75}{4}-10-\frac{35}{4}=0;\qquad \theta=\arccos(0)=\frac{\pi}{2}.$$

De aquí se obtienen finalmente las longitudes de los lados:

$$4+\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=5,\quad 4+\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=3,\quad 4+\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=4.$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI