Problema 135

Propuesto por el editor

Demostrar que cx^2-ax+b es un divisor común de ax^3-bx^2+c y bx^3-cx+a si divide a uno de estos dos polinomios.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España.

Nota: existen ciertos casos patológicos, según que ciertas combinaciones de los coeficientes sean nulos o no, para los que el resultado a demostrar es falso; en una primera parte, asumiremos que todos los coeficientes son no nulos, y en una segunda, analizaremos los casos en los que algún coeficiente es nulo, para identificar los casos patológicos.

Sean pues todos los coeficientes no nulos. Entonces, podemos escribir:

$$ax^3-bx^2+c=\left(\frac{a}{c}x+\frac{a^2-bc}{c^2}\right)\left(cx^2-ax+b\right)+\frac{a^3-2abc}{c^2}x+\frac{c^3-a^2b+b^2c}{c^2};$$

$$bx^3-cx+a=\left(\frac{b}{c}x+\frac{ab}{c^2}\right)\left(cx^2-ax+b\right)+\frac{a^2b-b^2c-c^3}{c^2}x+\frac{a\left(c^2-b^2\right)}{c^2}.$$

Entonces, el primer polinomio divide al segundo si y sólo si

$$a^2=2bc, \qquad \text{y} \qquad a^2b=c^3+b^2c,$$

mientras que el primer polinomio divide al tercero si y sólo si

$$a^2b=b^2c+c^3, \qquad \text{y} \qquad c^2=b^2.$$

Es entonces obvio que una de las dos condiciones es común. Ahora bien, si el primer polinomio divide al segundo, entonces $a^2=2bc$, que aplicado a la condición común resulta en

$$c^3+b^2c=a^2b=2b^2c, \qquad c^2=b^2,$$

y el primer polinomio divide también al tercero. Recíprocamente, si el primer polinomio divide al tercero, entonces $b^2=c^2$, que aplicado a la condición común resulta en

$$a^2b=b^2c+c^3=2b^2c, \qquad a^2=2bc,$$

con lo que el primer polinomio divide también al segundo, q.e.d..

Analicemos ahora los casos con algún coeficiente nulo.

Si los tres coeficientes son nulos, los tres polinomios son nulos, con lo que la división tanto del segundo como del tercero entre el primero es una indeterminación.

Si c=0, y a es no nulo, el primer polinomio divide siempre al segundo con cociente $-x^2$, mientras que para $x=b/a$ (la raíz del primer polinomio), el tercer polinomio toma valor b^4/a^3+a, valor no nulo que tiene el mismo signo que a, con lo que el primero no dividiría al tercero. Si a=c=0, y b es no nulo, entonces el primer polinomio es constante y no nulo, con lo que dividiría al segundo y al tercero siempre.

Si b=0 y c es no nulo, el tercer polinomio tendría grado 1 y el primero grado 2, con lo que el tercero nunca sería divisible por el primero. Además, el primer polinomio tendría una raíz nula, pero el segundo no, con lo que el segundo nunca sería divisible por el primero, siendo en este caso la afirmación del enunciado trivialmente cierta.

Finalmente, si a=0 es el único coeficiente nulo, podemos escribir

$$-bx^2+c=-\frac{b}{c}\left(cx^2+b\right)+\frac{c^2+b^2}{c}, \qquad bx^3-cx=\frac{b}{c}x\left(cx^2+b\right)-\frac{b^2+c^2}{c}x,$$

donde se comprueba trivialmente que el resto no puede ser nulo en ninguno de los dos casos a menos que b y c sean ambos nulos, en contradicción con la hipótesis de que a es el único coeficiente nulo.

Por lo tanto, hemos encontrado el siguiente caso patológico, y hemos demostrado que es exhaustivo: si c es nulo y a no lo es, el primer polinomio divide siempre al segundo, pero nunca al tercero.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: