PROBLEMAS PROPUESTOS 136-140

PROBLEMA 136. Propuesto por Ovidiu Furdui, Kalamazoo, USA.

Sea $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$ la "parte decimal" o "mantisa" del número real a.

Calcular la integral definida, entre $1/n$ y 1, de la función

$$\cos\left(\pi\left\{nx\right\}\right),$$

donde n es un entero positivo.

PROBLEMA 137. Propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania.

Sea $O\left(n\right)$ el número de números impares entre los primeros $2n-1$ números naturales, y sean $S_1\left(n\right), S_2\left(n\right)$ su suma y la suma de sus cuadrados, respectivamente.

i)Comparar $O\left(n\right)$ con $S_1\left(n\right)$.

ii) Hallar todos los números naturales n que verifican la desigualdad

$$S_2\left(n\right) - 3 \cdot O\left(n\right) \geq S_1\left(n\right).$$

iii) Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_2\left(n\right)}{O\left(n\right) \cdot S_1\left(n\right)}.$$

PROBLEMA 138. Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.

Sea $A_1, A_2, ..., A_n$ un sistema completo de sucesos asociado a un experimento aleatorio. Es decir, los A_k son no vacíos $\left(1 \leq k \leq n\right)$, disjuntos dos a dos y tales que

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = E \text{ (suceso seguro).}$$

Demostrar que

$$\prod_{k=1}^{n} p\left(A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} p^2\left(A_k\right).$$

PROBLEMA 139. Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.

Sean a, b, c los lados de un triángulo de semiperímetro p y circunradio R.

Demostrar que

$$\frac{a^3}{\sin A} + \frac{b^3}{\sin B} + \frac{c^3}{\sin C} \geq \frac{8Rp^2}{3}.$$

PROBLEMA 140. Propuesto por Doru Popescu Anastasiu, en el número 3 de la revista SIPROMA (1998); recuperado por el editor, ya que al ser el último número publicado, no se recibieron soluciones (excepto del proponente).

Sea $A_1A_2A_3$ un triángulo, de lados respectivamente opuestos a_1, a_2, a_3 y área S.

Se consideran los puntos

$$
\begin{aligned}
M_1, M_2 &\in (A_2A_3)\,; P_1, P_2 \in (A_3A_1)\,; Q_1, Q_2 \in (A_1A_2) \text{ tales que} \\
M_1P_2 &\parallel A_1A_2; \quad M_2Q_1 \parallel A_1A_3; \quad P_1Q_2 \parallel A_2A_3.
\end{aligned}
$$

Sean

$$\{B_1\} = M_2Q_1 \cap M_1P_2; \quad \{B_2\} = P_1Q_2 \cap M_1P_2; \quad \{B_3\} = M_2Q_1 \cap Q_2P_1.$$

Llamemos σ al área del triángulo $B_1B_2B_3$; y finalmente, sean $k_1, k_2.k_3$ las distancias de B_1, B_2, B_3 a A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, respectivamente.

Demostrar que

$$\sum_{i=1}^{3} k_ik_{i+1}a_ia_{i+1} + 4\sqrt{\sigma S} \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} k_ia_i\right) \geq 2S\,(S - 4\sigma)\,,$$

donde los subíndices se toman congruentes módulo 3.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI