

PROBLEMAS DE NIVEL MEDIO Y DE OLIMPIADAS (28)

LOS PROBLEMAS DE GEOMETRÍA DE LA OLIMPIADA IBEROAMERICANA 2006

Presentamos soluciones alternativas a las oficiales, de los problemas 1 y 5 de la OIM 2006, celebrada en Guayaquil, Ecuador.

Problema 1, propuesto por Ecuador.

En el triángulo ABC, rectángulo en A, se consideran las circunferencias inscrita y circunscrita. La recta AM es tangente a la circunferencia circunscrita en el punto A (M es un punto de BC). S y R son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los catetos AC y AB, respectivamente. La recta RS corta a la recta BC en N. Las rectas AM y SR se cortan en U.

Demostrar que el triángulo UMN es isósceles.

Primera solución (de Patricia Fauring, Jefe de la Delegación de Argentina)

Sea $\widehat{ABC} = \beta$. Entonces $\widehat{MAC} = \beta$ (ángulo semiinscrita que abarca el mismo arco).

Como AS = AR (tangentes a una circunferencia desde un punto exterior), $\widehat{ARS} = \widehat{ASR} = 45^\circ$, luego $\widehat{NRB} = 135^\circ$.

En el triángulo BNR, $\widehat{BNR} = 180^\circ - \beta - 135^\circ = 45^\circ - \beta$.

En el triángulo ABM, $\widehat{AMB} = 180^\circ - \beta - (\beta + 90^\circ) = 90^\circ - 2\beta$.

En el triángulo MNU tenemos $\widehat{MNU} = 45^\circ - \beta$ y el ángulo exterior $\widehat{UMC} = 90^\circ - 2\beta$; entonces $\widehat{MUN} = 90^\circ - 2\beta - (45^\circ - \beta) = 45^\circ - \beta$ y resulta $\widehat{MNU} = \widehat{MUN}$. ■

Segunda solución, del estudiante cubano CUB2, galardonada por el Jurado Internacional con un premio especial, a propuesta del Tribunal de coordinación del problema 1.

Aplicando el teorema de Menelao en los triángulos AMC y ABC, cortados por RS, se tiene:

$$\frac{AU}{UM} \cdot \frac{MN}{NC} \cdot \frac{CS}{SA} = 1 \implies \frac{MN}{UM} = \frac{NC \cdot SA}{CS \cdot AU} \quad (1)$$

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CS}{AS} = 1 \implies \frac{NC}{CS} = \frac{BN}{RB} \quad (2)$$

donde en el segundo caso se utiliza AR = AS por ser tangentes a la circunferencia inscrita.

Como $\widehat{BAC} = 90^\circ$, se tiene $\widehat{ASR} = \widehat{ARS} = \widehat{NRB} = 45^\circ$.

Además, $\widehat{UAS} = 90^\circ + \widehat{UAB} = 90^\circ + \widehat{ACB}$ (por ser MA tangente y el ángulo inscrito igual al semininscrito) = \widehat{NBA} .

Como consecuencia de lo anterior, los triángulos UAS y NBR son semejantes. Entonces, por (2),

$$\frac{MN}{UM} = \frac{BN}{RB} \cdot \frac{SA}{AU} = 1,$$

y UMN es isósceles. ■

Tercera solución (con coordenadas, del Tribunal de coordinación del problema 1)

Se toma un sistema de coordenadas con origen en el vértice A del triángulo rectángulo ABC y ejes los catetos; sea O el centro de la circunferencia inscrita.

Sean b, c las longitudes de los catetos del triángulo ABC; a la longitud de la hipotenusa, y p el semiperímetro.

Las coordenadas de los puntos relevantes en el problema y las ecuaciones de las rectas que importan son las siguientes:

$$A(0, 0), B(c, 0), C(0, b), O\left(\frac{c}{2}, \frac{b}{2}\right), R(p-a, 0), S(0, p-a).$$

$$\begin{aligned} AO &\equiv y = \frac{b}{c}x; & AM &\equiv y = -\frac{c}{b}x; \\ BC &\equiv \frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1; & SR &\equiv x + y = p - a. \end{aligned}$$

Las coordenadas de los puntos M, N y U son:

$$\begin{aligned} M &\equiv \left(\frac{cb^2}{b^2 - c^2}, \frac{-c^2b}{b^2 - c^2} \right) \\ N &\equiv \left(\frac{(p-a-b)c}{c-b}, \frac{(p-a-c)b}{b-c} \right) \\ U &\equiv \left(\frac{(p-a)b}{b-c}, \frac{(p-a)c}{b-c} \right) \end{aligned}$$

Para comprobar que UMN es isósceles, se pueden considerar los ángulos entre las rectas o ver que $UM^2 = MN^2$.

En el segundo caso, la expresión final para UM^2 es

$$UM^2 = \frac{[(p-a)(b+c) - cb]^2 (b^2 + c^2)}{(b-c)^2 (b+c)^2};$$

y la de MN^2 :

$$MN^2 = \frac{c^2[(b^2 + (p-a-b)(b+c))]^2 + b^2 [c^2 + (p-a-c)(b+c)]^2}{(b-c)^2 (b+c)^2}.$$

Desarrollando se comprueba que

$$\begin{aligned} & b^2 + (p - a - b)(b + c), \\ & c^2 + (p - a - c)(b + c), \\ & (p - a)(b + c) - cb \end{aligned}$$

son todos iguales a

$$pb + pc - ab - ac - cb$$

y el triángulo es isósceles. ■

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revista_oim/

Edita:

