Problema 122

Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.

Sean a, b, c los lados de un triángulo acutángulo ABC con semiperímetro s. Demostrar que

$$\left(\frac{a}{s}\right)^3 \sec(A)+\left(\frac{b}{s}\right)^3 \sec(B)+\left(\frac{c}{s}\right)^3 \sec(C)\geq\frac{16}{9}.$$

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España.

Podemos sustituir, utilizando el teorema del coseno:

$$a^3\sec(A)=\frac{abc\left[\left(a^2+b^2+c^2\right)-\left(b^2+c^2-a^2\right)\right]}{2bc\cos(A)}=\frac{abc\left(a^2+b^2+c^2\right)}{b^2+c^2-a^2}-abc.$$

Rotando cíclicamente los lados y ángulos, la desigualdad a demostrar es entonces equivalente a la siguiente:

$$\frac{abc\left(a^2+b^2+c^2\right)}{s^3}\left[\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}\right]-3\frac{abc}{s^3}\geq\frac{16}{9}.$$

Podemos reescribir el corchete como

$$\frac{a^4-\left(b^2-c^2\right)^2+b^4-\left(c^2-a^2\right)^2+c^4-\left(a^2-b^2\right)^2}{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)}=\frac{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}{8a^2b^2c^2\cos(A)\cos(B)\cos(C)}$$

$$=\frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a)}{8a^2b^2c^2\cos(A)\cos(B)\cos(C)}=\frac{s}{4abc}\frac{(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a)}{abc\cos(A)\cos(B)\cos(C)}.$$

Utilizando el teorema del seno, se tiene que

$$\frac{a+b-c}{c}=\frac{\operatorname{sen}(A)+\operatorname{sen}(B)}{\operatorname{sen}(C)}-1=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)}-1$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right)}=2\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right)}.$$

Se ha utilizado que al ser la semisuma de los ángulos del triángulo igual a $\pi/2$, el seno y coseno de $(A+B)/2$ son respectivamente iguales al coseno y seno de $C/2$. Entonces,

$$\frac{(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a)}{abc}=8\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right).$$

De aquí se deduce que el miembro izquierdo de la desigualdad a demostrar es igual a

$$\frac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right)}{s^2\cos(A)\cos(B)\cos(C)}-3\frac{abc}{s^3}.$$

Utilizando la desigualdad entre medias aritmética y geométrica, y al ser ABC acutángulo, se tiene que

$$\sqrt{\cos(B)\cos(C)}\leq\frac{\cos(B)+\cos(C)}{2}=\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\leq\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right),$$

con igualdad si y sólo si el triángulo es isósceles en A. Rotando cíclicamente los vértices y multiplicando los resultados similares, se tiene

$$\cos(A)\cos(B)\cos(C)\leq\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right),$$

con igualdad si y sólo si ABC es equilátero. Entonces, se tiene que

$$\left(\frac{a}{s}\right)^3\sec(A)+\left(\frac{b}{s}\right)^3\sec(B)+\left(\frac{c}{s}\right)^3\sec(C)\geq\frac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{s^2}-3\frac{abc}{s^3},$$

con igualdad si y sólo si ABC es equilátero. Ahora bien, utilizando la desigualdad entre medias aritmética y cuadrática, y entre aritmética y geométrica, se tiene, respectivamente, que

$$a^2+b^2+c^2\geq3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2=\frac{4}{3}s^2,\qquad abc\leq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\frac{8s^3}{27},$$

con igualdad si y sólo si ABC es equilátero en ambos casos. Luego

$$\left(\frac{a}{s}\right)^3\sec(A)+\left(\frac{b}{s}\right)^3\sec(B)+\left(\frac{c}{s}\right)^3\sec(C)\geq\frac{8}{3}-\frac{8}{9}=\frac{16}{9},$$

q.e.d., dándose la igualdad si y sólo si el triángulo es equilátero.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI