Problema 138

Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un sistema completo de sucesos asociado a un experimento aleatorio. Es decir, los A_k son no vacíos ($1 \le k \le n$), disjuntos dos a dos y tales que

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = E \text{ (suceso seguro).}$$

Demostrar que

$$\prod_{k=1}^{n} p(A_k) \le \sum_{k=1}^{n} p^2(A_k).$$

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España.

Nótese que si $n=1$, ambos lados de la ecuación son iguales a 1 ($A_1=E$). Por la desigualdad entre medias aritmética y geométrica (que siempre es posible usar sobre las probabilidades de un sistema completo de sucesos ya que todas ellas son no negativas),

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} p(A_k)} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p(A_k) = \frac{1}{n} p\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \frac{1}{n} p(E) = \frac{1}{n}, \qquad \prod_{k=1}^{n} p(A_k) \le \frac{1}{n^n},$$

con igualdad si y sólo si las probabilidades de todos los sucesos A_k son iguales. De la misma forma, utilizando las desigualdades entre medias aritmética y cuadrática,

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p^2(A_k)} \ge \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p(A_k) = \frac{1}{n}, \qquad \sum_{k=1}^{n} p^2(A_k) \ge \frac{1}{n},$$

nuevamente con igualdad si y sólo si las probabilidades son todas iguales. Se tiene entonces de forma inmediata, no ya sólo el resultado pedido, sino los dos siguientes resultados, más fuertes:

$$\prod_{k=1}^{n} p(A_k) \le \frac{1}{n^{n-1}} \sum_{k=1}^{n} p^2(A_k), \qquad \prod_{k=1}^{n} p(A_k) \le \left(\sum_{k=1}^{n} p^2(A_k)\right)^n.$$

Las igualdades se dan si y sólo si los sucesos A_k son equiprobables. Es obvio que el primer resultado obtenido es más fuerte que el del enunciado, al ser $n^{n-1}>1$ para todo $n \ge 2$, mientras que el segundo lo es porque, al ser las $p(A_k)$ no negativas pero menores o iguales a 1, sus cuadrados son menores que ellas mismas, con lo que

$$\sum_{k=1}^{n} p^2(A_k) \le \sum_{k=1}^{n} p(A_k) = 1; \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} p^2(A_k)\right)^{n-1} \le 1.$$

Nótese finalmente que en esta última acotación se da la igualdad si y sólo si un suceso tiene probabilidad 1 y el resto tienen probabilidad 0.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI