

Problema 139

Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España

Sean a, b, c los lados de un triángulo de semiperímetro p y circunradio R .

Demostrar que

$$\frac{a^3}{\operatorname{sen} A} + \frac{b^3}{\operatorname{sen} B} + \frac{c^3}{\operatorname{sen} C} \geq \frac{8Rp^2}{3}.$$

Solución de Daniel Lasosa Medarde, Pamplona, España.

Por el teorema del seno, $a=2R\operatorname{sen}A$, $b=2R\operatorname{sen}B$, $c=2R\operatorname{sen}C$. Utilizando entonces la desigualdad entre medias aritmética y cuadrática aplicadas a los lados del triángulo,

$$\frac{a^3}{\operatorname{sen} A} + \frac{b^3}{\operatorname{sen} B} + \frac{c^3}{\operatorname{sen} C} = 2R(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2R \cdot 3 \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^2 = 2R \cdot \frac{4p^2}{3} = \frac{8Rp^2}{3},$$

q.e.d., donde se da la igualdad si y sólo si el triángulo es equilátero.

De hecho, la anterior desigualdad puede generalizarse de la siguiente forma: Si m, n son tales que $m-n \geq 1$, entonces

$$\frac{a^m}{\operatorname{sen}^n A} + \frac{b^m}{\operatorname{sen}^n B} + \frac{c^m}{\operatorname{sen}^n C} \geq \frac{2^m R^n p^{m-n}}{3^{m-n-1}}.$$

La demostración es idéntica al caso anterior:

$$\frac{a^n}{\operatorname{sen}^n A} = 2^n R^n; \quad \frac{a^m}{\operatorname{sen}^n A} + \frac{b^m}{\operatorname{sen}^n B} + \frac{c^m}{\operatorname{sen}^n C} = 2^n R^n (a^{m-n} + b^{m-n} + c^{m-n}).$$

Ahora, como es conocido, con tal de que $m-n$ sea mayor o igual que 1, se cumple:

$$\sqrt[m-n]{\frac{a^{m-n} + b^{m-n} + c^{m-n}}{3}} \geq \frac{a+b+c}{3} = \frac{2p}{3}, \quad a^{m-n} + b^{m-n} + c^{m-n} \geq 3 \left(\frac{2p}{3} \right)^{m-n},$$

$$\frac{a^m}{\operatorname{sen}^n A} + \frac{b^m}{\operatorname{sen}^n B} + \frac{c^m}{\operatorname{sen}^n C} \geq 3 \cdot 2^n R^n \left(\frac{2p}{3} \right)^{m-n} = \frac{2^m R^n p^{m-n}}{3^{m-n-1}},$$

con igualdad si y sólo si $a=b=c$ cuando $m-n > 1$, y siempre cuando $m-n=1$. Nótese que en esta generalización (1) no es necesario que ni m ni n sean ni enteros, ni positivos, sólo que cumplan $m-n \geq 1$, y (2) cuando $m=3$, $n=1$, llegamos exactamente al caso propuesto y a la desigualdad antes demostrada. Nótese finalmente que, si $m-n \leq 1$, la desigualdad sería válida pero con sentido opuesto, es decir, en este caso sería

$$\sqrt[m-n]{\frac{a^{m-n} + b^{m-n} + c^{m-n}}{3}} \leq \frac{2p}{3}, \quad \frac{a^m}{\operatorname{sen}^n A} + \frac{b^m}{\operatorname{sen}^n B} + \frac{c^m}{\operatorname{sen}^n C} \leq \frac{2^m R^n p^{m-n}}{3^{m-n-1}},$$

nuevamente con igualdad si y sólo si $a=b=c$ cuando $m-n > 1$, y siempre cuando $m-n=1$.

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revista_oim/

Edita:

