Problema 140. (Propuesto por Doru Popescu Anastasiu).

Sea $A_1A_2A_3$ un triángulo de lados respectivamente opuestos a_1, a_2, a_3 y área S. Se consideran los puntos $M_1, M_2 \in (A_2, A_3)$; $P_1P_2 \in (A_3, A_1)$; $Q_1Q_2 \in (A_1, A_2)$ tales que $M_1P_2 \,//\, A_1A_2$; $M_2Q_1 \,//\, A_1A_3$; $P_1Q_2 \,//\, A_2A_3$. Sean $\{B_1\} = M_2Q_1 \cap M_1P_2$; $\{B_2\} = P_1Q_2 \cap M_1P_2$; $\{B_3\} = M_2Q_1 \cap Q_2P_1$. Sea σ el área del triángulo $B_1B_2B_3$ y finalmente sean k_1, k_2, k_3 las distancias de B_1, B_2, B_3 a A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 respectivamente. Demostrar que

$$\sum_{i=1}^{3} k_i k_{i+1} a_i a_{i+1} + 4\sqrt{\sigma S}\left(\sum_{i=1}^{3} k_i a_i\right) \geq 2S(S - 4\sigma)$$

Resolución: (Vicente Vicario García, Universidad de Huelva, España).

El enunciado tal y como aparece es falso, siendo cierto para los valores que especificaremos a continuación.

Es evidente que el triángulo $B_1B_2B_3$ es semejante al triángulo $A_1A_2A_3$. Denominando k a la razón de semejanza entre ambos, tendremos

$$k = \frac{M_1M_2}{A_2A_3} = \frac{P_1P_2}{A_1A_3} = \frac{Q_1Q_2}{A_1A_2} \quad , 0 < k < 1$$

Además la relación entre las áreas de estos triángulos es $\sigma = k^2 S$. También, denotando por h_{A_1} la altura trazada desde el vértice A_1 a su lado opuesto, etc, se tendrá evidentemente que

$$2S = h_{A_1} \cdot A_2A_3 = h_{A_2} \cdot A_1A_3 = h_{A_3} \cdot A_1A_2$$

Por otra parte, por semejanza de triángulos tenemos que

$$\frac{k_1}{M_1M_2} = \frac{h_{A_1}}{A_2A_3}; \quad \frac{k_2}{P_1P_2} = \frac{h_{A_2}}{A_1A_3}; \quad \frac{k_3}{Q_1Q_2} = \frac{h_{A_3}}{A_1A_2}$$

Entonces, sustituyendo en la expresión a demostrar tenemos que

$$\sum_{i=1}^{3} k_i k_{i+1} a_i a_{i+1} + 4\sqrt{\sigma S}\left(\sum_{i=1}^{3} k_i a_i\right) = h_{A_1} M_1M_2 \cdot h_{A_2} P_1P_2 + h_{A_2} P_1P_2 \cdot h_{A_3} Q_1Q_2 +$$
$$+ h_{A_3} Q_1Q_2 \cdot h_{A_1} M_1M_2 + 4kS\left(h_{A_1} M_1M_2 + h_{A_2} P_1P_2 + h_{A_3} Q_1Q_2\right) \geq 2S\left(S - 4k^2 S\right)$$

Finalmente, expresando las longitudes de los lados del triángulo $B_1B_2B_3$ en función respectiva de los lados del triángulo $A_1A_2A_3$ y la razón de semejanza k, tenemos

$$kh_{A_1}A_2A_3 \cdot kh_{A_2}A_1A_3 + kh_{A_2}A_1A_3 \cdot kh_{A_3}A_1A_2 + kh_{A_3}A_1A_2 \cdot kh_{A_1}A_2A_3 +$$
$$+ 4kS\left(kh_{A_1}A_2A_3 + kh_{A_2}A_1A_3 + kh_{A_3}A_1A_2\right) \geq 2S^2\left(1-4k^2\right)$$

y simplificando tenemos que

$$3k^2 \cdot 4S^2 + 4kS \cdot 3k \cdot 2S \geq 2S\left(1-4k^2\right) \Leftrightarrow 22k^2 \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{22}} \leq k < 1$$

Así pues, el enunciado del problema es cierto sólo para valores de k (razón de semejanza) cumpliendo las desigualdades $\sqrt{\frac{1}{22}} \leq k < 1$.

---oooOooo---

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI