Problema 140

Propuesto por Doru Popescu Anastasiu en el número 3 de la revista SIPROMA

Sea $A_1A_2A_3$ un triángulo, de lados respectivamente opuestos a_1, a_2, a_3 y área S. Se consideran los puntos

$$M_1, M_2 \in (A_2A_3); \qquad P_1, P_2 \in (A_3A_1); \qquad Q_1, Q_2 \in (A_1A_2);$$

tales que

$$M_1P_2 \parallel A_1A_2; \qquad M_2Q_1 \parallel A_1A_3; \qquad P_1Q_2 \parallel A_2A_3.$$

Sean

$$\{B_1\} = M_2Q_1 \cap M_1P_2; \qquad \{B_2\} = P_1Q_2 \cap M_1P_2; \qquad \{B_3\} = M_2Q_1 \cap Q_2P_1.$$

Llamemos σ al área del triángulo $B_1B_2B_3$; y finalmente, sean k_1, k_2, k_3 las distancias de B_1, B_2, B_3 a A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, respectivamente.

Demostrar que

$$\sum_{i=1}^{3} k_i k_{i+1} a_i a_{i+1} + 4\sqrt{\sigma S} \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} k_i a_i \right) \leq 2S(S - 4\sigma)$$

donde los subíndices se toman congruentes módulo 3.

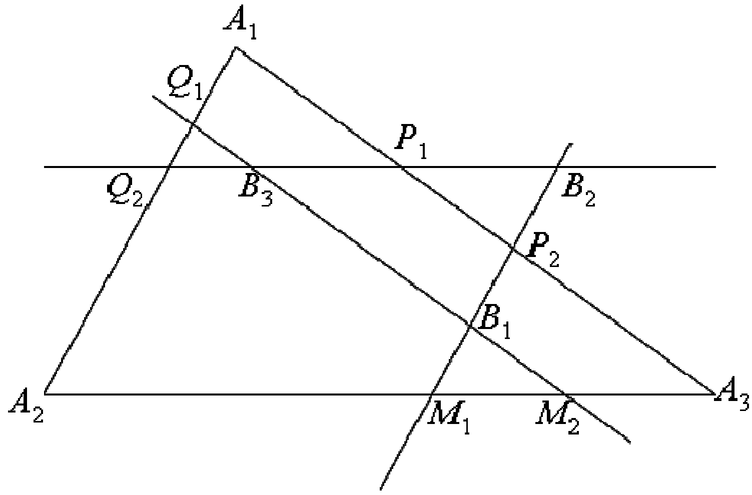
Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España.

Nótese que el sentido de la desigualdad es opuesto al originalmente publicado, pues se pueden encontrar casos en los que la desigualdad no sería cierta con el sentido originalmente publicado (ver contraejemplo 1 al final de esta solución).

Además, se considerarán las distancias k_i signadas, de forma que k_i tendrá signo positivo si B_i está en el interior del triángulo $A_1A_2A_3$, signo negativo si está en el exterior. Esto nos permite tratar todos los casos en los que los puntos M_i, P_i, Q_i estén en el interior de los lados del triángulo, tal como se especifica en el enunciado, sin distinguir los casos en los que todos los B_i estén en el interior del triángulo $A_1A_2A_3$ o sobre sus lados (únicos casos en los que la desigualdad propuesta en esta solución sería siempre correcta caso de no tomar distancias k_i signadas), de los casos en los que algunos o todos los B_i puedan estar en el exterior de dicho triángulo. El contraejemplo 2 al final de esta solución muestra un caso en el que la desigualdad propuesta en esta solución falla si no se toman distancias k_i signadas.

Sin embargo, asumiendo estos dos cambios, es decir, el cambio en el sentido de la desigualdad, y el que los k_i puedan ser signados, la desigualdad es siempre cierta, como se demuestra a continuación.

Es trivial comprobar que $B_1B_2B_3$ es semejante a $A_1A_2A_3$. Para ello, nos basta observar que B_1 y B_2 están en M_1P_2, luego B_1B_2 es paralelo a A_1A_2, y de forma similar con los otros dos lados de $B_1B_2B_3$. También es trivial comprobar que, al ser P_1Q_2 paralelo a A_2A_3, $A_1Q_2P_1$ es semejante a $A_1A_2A_3$. De la misma forma, $A_2M_2Q_1$ es semejante a $A_2A_3A_1$, y $A_3P_2M_1$ es semejante a $A_3A_1A_2$. Finalmente, $B_1M_1M_2$ es semejante a $A_1A_2A_3$, por ser B_1M_1 (sobre la recta M_1P_2) paralelo a A_1A_2, y B_1M_2 (sobre la recta Q_1M_2) paralelo a A_1A_3. De igual manera, $B_2P_1P_2$ es semejante a $A_2A_3A_1$ y $B_3Q_1Q_2$ es semejante a $A_3A_1A_2$. Sean ahora σ_1, σ_2, σ_3 las áreas respectivas de $B_1M_1M_2$, $B_2P_1P_2$, $B_3Q_1Q_2$.



Llamemos además

$$\rho_1 = \frac{A_1Q_2}{A_1A_2} = \frac{A_1P_1}{A_1A_3}, \quad \rho_2 = \frac{A_2M_2}{A_2A_3} = \frac{A_2Q_1}{A_2A_1}, \quad \rho_3 = \frac{A_3P_2}{A_3A_1} = \frac{A_3M_1}{A_3A_2}, \quad \rho = \frac{B_1B_2}{A_1A_2} = \frac{B_2B_3}{A_2A_3} = \frac{B_3B_1}{A_3A_1}.$$

Nótese que las definiciones son consistentes por las relaciones de paralelismo dadas en el enunciado y gracias al teorema de Thales. Entonces, si B_2, B_3 son interiores al triángulo $A_1A_2A_3$, como es el caso en la figura,

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{B_2B_3}{A_2A_3} = \frac{B_2Q_2}{A_2A_3} - \frac{B_3Q_2}{A_3A_2} = \frac{A_2M_1}{A_2A_3} - \frac{Q_1Q_2}{A_1A_2} = \frac{A_2A_3 - A_3M_1}{A_2A_3} - \frac{A_2Q_1 + A_1Q_2 - A_1A_2}{A_1A_2} \\ &= (1-\rho_3) - (\rho_2 + \rho_1 - 1) = 2 - (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3).\end{aligned}$$

Sin embargo, si ambos fueran exteriores al triángulo $A_1A_2A_3$, entonces

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{B_2B_3}{A_2A_3} = \frac{B_2Q_2}{A_2A_3} + \frac{B_3Q_2}{A_3A_2} = \frac{A_2M_1}{A_2A_3} + \frac{Q_1Q_2}{A_1A_2} = \frac{A_2A_3 - A_3M_1}{A_2A_3} + \frac{A_1A_2 - A_2Q_1 - A_1Q_2}{A_1A_2} \\ &= (1-\rho_3) + (1 - \rho_2 - \rho_1) = 2 - (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3).\end{aligned}$$

Ahora bien, como si dos triángulos semejantes tienen entre sus lados razón ρ, entonces tienen entre sus áreas razón ρ^2, es trivial comprobar que

$$\frac{\sigma}{S}=\left(\frac{B_1B_2}{A_1A_2}\right)^2=\rho^2, \qquad \frac{\sigma_3}{S}=\left(\frac{Q_1Q_2}{A_1A_2}\right)^2=\left(\rho_1+\rho_2-1\right)^2,$$

y de forma similar para los demás triángulos involucrados. Finalmente, la altura desde A_i hasta $A_{i+1}A_{i-1}$ es igual a $2S/a_i$. Entonces, por las semejanzas comprobadas,

$$\frac{\sigma_i}{S}=\left(\frac{k_ia_i}{2S}\right)^2=\left(\rho_{i+1}+\rho_{i-1}-1\right)^2.$$

Ahora bien, si B_i es exterior a $A_1A_2A_3$, entonces $\rho_{i+1}+\rho_{i-1}<1$, mientras que si B_i es interior a $A_1A_2A_3$, entonces $\rho_{i+1}+\rho_{i-1}>1$, estando B_i sobre el lado $A_{i-1}A_{i+1}$ si y sólo si $\rho_{i+1}+\rho_{i-1}=1$, con lo que los signos propuestos para k_i implican que

$$k_ia_i=2S\left(\rho_{i+1}+\rho_{i-1}-1\right).$$

Podemos entonces utilizar los anteriores resultados para expresar los diferentes términos involucrados en la desigualdad a demostrar:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}k_ik_{i+1}a_ia_{i+1}&=4S^2\sum_{i=1}^{3}\left(\rho_i+\rho_{i+1}-1\right)\left(\rho_{i-1}+\rho_i-1\right)\\&=2S^2\left[\sum_{i=1}^{3}\left(\rho_{i-1}+\rho_{i+1}-1\right)\right]^2-2S^2\sum_{i=1}^{3}\left(\rho_{i-1}+\rho_{i+1}-1\right)^2\le 2S^2\left(1-2\rho\right)^2,\end{aligned}$$

con igualdad si y sólo si $\rho_{i-1}+\rho_{i+1}=1$ para todo i. Además,

$$4\sqrt{S\sigma}\cdot\sum_{i=1}^{3}k_ia_i=4\rho S\cdot 2S\sum_{i=1}^{3}\left(\rho_{i+1}+\rho_{i-1}-1\right)=8\rho S^2\left(1-2\rho\right).$$

Luego finalmente,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}k_ik_{i+1}a_ia_{i+1}+4\sqrt{\sigma S}\cdot\left(\sum_{i=1}^{3}k_ia_i\right)&\le 2S^2\left(1-2\rho\right)^2+8\rho S^2\left(1-2\rho\right)=2S^2-8\rho^2S^2\\&=2S\left(S-4\sigma\right),\end{aligned}$$

con igualdad si y sólo si $\rho_{i-1}+\rho_{i+1}=1$ para todo i, con lo que $\rho_1=\rho_2=\rho_3=1/2$. Por lo tanto, se ha demostrado la desigualdad propuesta, dándose la igualdad si y sólo si cada B_i es el punto medio del lado $A_{i-1}A_{i+1}$, o lo que es lo mismo, si $B_1=M_1=M_2$, $B_2=P_1=P_2$, $B_3=Q_1=Q_2$ son los puntos medios respectivos de los lados A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2.

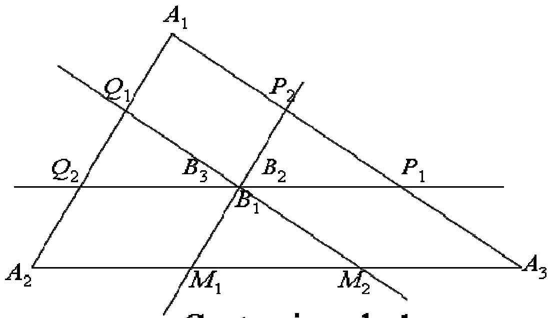
Contraejemplo 1:

Este es un contraejemplo al sentido originalmente propuesto para la desigualdad del enunciado.

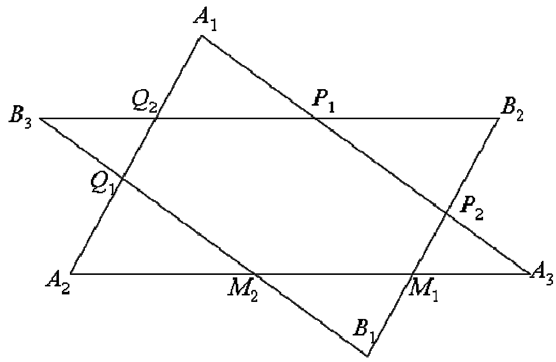
Sean $\rho_1=\rho_2=\rho_3=2/3$. Entonces, es trivial comprobar que M_1P_2, Q_1M_2, P_1Q_2 son las paralelas respectivas a A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 por el baricentro G del triángulo $A_1A_2A_3$. Es decir, que el triángulo $B_1B_2B_3$ está degenerado a un punto, con lo que σ=0. Además, las distancias k_1, k_2, k_3 son iguales a un tercio de las alturas respectivas del triángulo $A_1A_2A_3$ desde A_1, A_2, A_3. Luego

$$a_ik_i = \frac{2S}{3}; \qquad \sum_{i=1}^{3} k_ik_{i+1}a_ia_{i+1} + 4\sqrt{\sigma S}\cdot\left(\sum_{i=1}^{3} k_ia_i\right) = 3\left(\frac{2S}{3}\right)^2 = \frac{4S^2}{3} < 2S^2 = 2S\left(S-4\sigma\right).$$

La desigualdad tiene entonces sentido opuesto al inicialmente propuesto.



Contraejemplo 1



Contraejemplo 2

Contraejemplo 2:

Este es un contraejemplo que demuestra que, si los k_i no son distancias signadas, entonces tampoco se cumple la desigualdad con el sentido propuesto en esta solución.

Sean $\rho_1=\rho_2=\rho_3=1/3$. Es trivial entonces comprobar que $A_1A_2A_3$ y $B_1B_2B_3$ son iguales, con lo que $\sigma=S$, siendo además la distancia desde B_i hasta $A_{i-1}A_{i+1}$, en valor absoluto, igual a un tercio de la altura del triángulo $A_1A_2A_3$ desde A_i. Si los k_i son distancias no signadas, tendríamos

$$\sum_{i=1}^{3} k_ik_{i+1}a_ia_{i+1} + 4\sqrt{\sigma S}\cdot\left(\sum_{i=1}^{3} k_ia_i\right) = \frac{4S^2}{3} + 4S\cdot 2S = \frac{28S^2}{3} > -6S^2 = 2S\left(S-4\sigma\right).$$

Nótese sin embargo que, si los k_i fueran distancias signadas, entonces todas ellas serían negativas, con lo que

$$\sum_{i=1}^{3} k_ik_{i+1}a_ia_{i+1} + 4\sqrt{\sigma S}\cdot\left(\sum_{i=1}^{3} k_ia_i\right) = \frac{4S^2}{3} - 4S\cdot 2S = -\frac{20S^2}{3} < -6S^2 = 2S\left(S-4\sigma\right),$$

y sí se cumpliría la desigualdad propuesta en esta solución.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI