Problema 136. (Propuesto por Ovidiu Furdui, Kalamazoo, USA).

Sea $\{a\} = a - [a]$ **la "parte decimal" o "mantisa" del número real *a*. Calcular la integral definida entre 1/*n* y 1, de la función** $\cos(\pi\{nx\})$ **donde *n* es un entero positivo.**

Resolución: (Vicente Vicario García, Universidad de Huelva, España).

Consideremos la función $\{nx\} = nx - [nx]$ que tiene como dominio de definición todos los números reales. Claramente en el intervalo $[0,1]$ presenta discontinuidades de primera especie de salto finito igual a la unidad en los puntos $x_i = i/n; i = 0,1,2,...,n$. Además es una función periódica de período $T = 1/n$ y es monótona creciente en cada intervalo de periodicidad.

Puesto que la función $\cos x$ es periódica de período 2π, entonces la función $f(x) = \cos(\pi\{nx\})$ es también periódica de período $T = 1/n$, presentando discontinuidades de primera especie de salto finito igual a 2 en los mismos puntos en los que era discontinua la función anterior $\{nx\}$.. la función $f(x)$ en cada período es continua y monótona decreciente presentando simetría impar respecto del punto medio de cada uno de los intervalos de periodicidad. Por tanto, la integral extendida a un período es nula, es decir

$$\int_{1/n}^{1} f(x)dx = \int_{1/n}^{1} \cos(\pi\{nx\})dx = \int_{0}^{1/n} \cos(\pi\{nx\})dx = 0 .$$

Nota: Ciertamente la integral, debido a la periodicidad, sigue siendo nula sobre cualquier intervalo definido de longitud 1/*n*, es decir,

$$\int_{\lambda}^{\lambda+1/n} \cos(\pi\{nx\})dx = 0, \forall \lambda \in R, n \in N^{+} .$$

---oooOooo---

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI