

**PROBLEMAS PARA OS MÁIS NOVOS (REOIM, nº 16)**

**5. Demostrar que**  $\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{6+\sqrt{6}}} > \frac{5}{6}$

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro; España)

$$2 < 4 \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{4} = 2 \Rightarrow 2 + \sqrt{2} < 2 + 2 = 4 \Rightarrow \sqrt{2 + \sqrt{2}} < \sqrt{4} = 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} > \frac{1}{2};$$

$$6 < 9 \Rightarrow \sqrt{6} < \sqrt{9} = 3 \Rightarrow 6 + \sqrt{6} < 6 + 3 = 9 \Rightarrow \sqrt{6 + \sqrt{6}} < \sqrt{9} = 3 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{6 + \sqrt{6}}} > \frac{1}{3}$$

$$\text{Así, } \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{6 + \sqrt{6}}} > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

## PROBLEMAS PARA OS MÁIS NOVOS (REOIM, nº 28)

**28.1. Demostrar que, calquera que sexa o número real  $t$ , se verifica a desigualdade**

$$t^4 - t + \frac{1}{2} > 0$$

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, Lugo; España)

Sexa, para calesquera números positivos  $a$  e real  $t$ ,  $f_a(t) = t^4 - t + a$ . Probarase a continuación que o menor valor de  $a$  que fai que  $f_a(t) \geq 0$  para calquera  $t$  é  $a = 3 \cdot 2^{-\frac{8}{3}}$ :

Se  $t \leq 0$ :  $t^4 \geq 0$ ,  $-t \geq 0$ ,  $a > 0$  implican  $f_a(t) > 0$ ;

Se  $t \geq 1$ :  $t \geq 0$ ,  $t-1 \geq 0$ ,  $t^2 + t + 1 > 0$  implican  $f_a(t) = t(t-1)(t^2 + t + 1) + a \geq 0 + a > 0$ ;

Se  $0 < t < 1$ :  $f_a(t) = t^4 - t + a$  é negativa se  $t < 2^{-\frac{2}{3}}$ , nula se  $t = 2^{-\frac{2}{3}}$  e positiva se  $t > 2^{-\frac{2}{3}}$ , logo  $f_a(t)$  é decrecente

en  $\left(0, 2^{-\frac{2}{3}}\right)$ , crecente en  $\left(2^{-\frac{2}{3}}, 1\right)$  e presenta un mínimo absoluto en  $t = 2^{-\frac{2}{3}}$ , de valor

$f_a\left(2^{-\frac{2}{3}}\right) = a - 3 \cdot 2^{-\frac{8}{3}}$ , logo  $f_a(t) \geq a - 3 \cdot 2^{-\frac{8}{3}}$ , con igualdade se e só se  $t = 2^{-\frac{2}{3}}$

Ademais,  $f_a\left(2^{-\frac{2}{3}}\right) = 0$  se e só se  $a = 3 \cdot 2^{-\frac{8}{3}}$ . Por tanto,  $f_a(t) \geq 0$  para calquera  $t$  se e só se

$a \geq 3 \cdot 2^{-\frac{8}{3}}$ ,  $f_a(t) > 0$  para calquera  $t$  se e só se  $a > 3 \cdot 2^{-\frac{8}{3}}$  e  $f_{\frac{8}{3 \cdot 2^{-\frac{8}{3}}}}(t) = 0$  se e só se  $t = 2^{-\frac{2}{3}}$

Así, está probada a seguinte

**Proposición:** Para calquera número real  $t$ , verifícase a desigualdade  $t^4 - t + 3 \cdot 2^{-\frac{8}{3}} \geq 0$ , con igualdade se e só se  $t = 2^{-\frac{2}{3}}$

E o problema pedido é un corolario desta proposición, pois, para calquera número real  $t$ , resulta que  $t^4 - t + \frac{1}{2} > t^4 - t + 3 \cdot 2^{-\frac{8}{3}} \geq 0$

## PROBLEMAS PARA OS MÁIS NOVOS (REOIM, nº 28)

**28.2. Por un punto interior  $P$  ao triángulo  $ABC$ , trázanse tres paralelas aos lados, que dividen a estes en tres segmentos, de lonxitudes respectivas  $a_1, a_2, a_3$  (o lado  $BC$ ),  $b_1, b_2, b_3$  (o lado  $CA$ ) e  $c_1, c_2, c_3$  (o lado  $AB$ ).**

**Demostrar que**

$$a_1 b_1 c_1 = a_2 b_2 c_2 = a_3 b_3 c_3$$

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, Lugo; España)

Como  $ABC$  e  $PA_1A_2$  teñen os lados respectivamente paralelos, terán os ángulos respectivamente iguais, sendo polo tanto semellantes, do cal se deduce que os seus lados son proporcionais;

$$\frac{AB}{PA_1} = \frac{BC}{A_1A_2} = \frac{CA}{A_2P}, \text{ ou sexa, } \frac{CA}{CB_1} = \frac{BC}{A_1A_2} = \frac{AB}{C_2B}, \text{ isto é, } \frac{b_1 + b_2 + b_3}{b_1} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_2} = \frac{c_1 + c_2 + c_3}{c_3},$$

analogamente,  $ABC$  é semellante a  $B_2PB_1$ , de onde

$$\frac{AB}{AC_1} = \frac{CA}{A_2P} = \frac{BC}{A_2C}, \text{ isto é, } \frac{c_1 + c_2 + c_3}{c_1} = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{b_2} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3};$$

$$ABC \text{ é semellante a } C_1C_2P, \text{ de onde } \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_1} = \frac{c_1 + c_2 + c_3}{c_2} = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{b_3}$$

Multiplicando membro a membro esas tres igualdades, resulta que

$$\frac{b_1 + b_2 + b_3}{b_1} \cdot \frac{c_1 + c_2 + c_3}{c_1} \cdot \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_1} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_2} \cdot \frac{b_1 + b_2 + b_3}{b_2} \cdot \frac{c_1 + c_2 + c_3}{c_2} \\ = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} \cdot \frac{b_1 + b_2 + b_3}{b_3} \cdot \frac{c_1 + c_2 + c_3}{c_3};$$

dividindo entre o numerador común  $(a_1 + a_2 + a_3) \cdot (b_1 + b_2 + b_3) \cdot (c_1 + c_2 + c_3)$ , resultan as igualdades dos denominadores:  $b_1 c_1 a_1 = a_2 b_2 c_2 = a_3 b_3 c_3$

## PROBLEMAS PARA OS MÁIS NOVOS (REOIM, nº 28)

**28.3. Demostrar que se  $0 < a < 1$  e  $0 < b < 1$ , entón**

$$\frac{ab(1-a)(1-b)}{(1-ab)^2} < \frac{1}{4}$$

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, Lugo; España)

Das hipóteses dedúcese que todos os factores  $a$ ,  $b$ ,  $1-a$ ,  $1-b$  e  $(1-ab)^2$  son estritamente positivos, logo

$$\frac{ab(1-a)(1-b)}{(1-ab)^2} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4ab(1-a)(1-b) < (1-ab)^2 \Leftrightarrow 0 < 1-2ab+a^2b^2-4ab+4a^2b+4ab^2-4a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow 0 < 1-2a(3-2a)b+a(4-3a)b^2$$

Sexa, para cada  $0 < x < 1$ ,  $f_a(x) = 1-2a(3-2a)x+a(4-3a)x^2$ ; hai que probar que  $0 < f_a(b)$ .

Probarase que, se  $0 < x < 1$ , entón  $0 < f_a(x)$ :

A gráfica de  $f_a$  é unha parábola cun mínimo absoluto no vértice  $V\left(\frac{3-2a}{4-3a}, f_a\left(\frac{3-2a}{4-3a}\right)\right)$ ;

$$f_a\left(\frac{3-2a}{4-3a}\right) = 1 - \frac{2a(3-2a)^2}{4-3a} + \frac{a(3-2a)^2}{4-3a} = \frac{4-12a+12a^2-4a^3}{4-3a} = \frac{4(1-a)^3}{4-3a}, \text{ que é estritamente}$$

positivo por selo numerador e denominador.

Así, se  $0 < x < 1$ , tense que  $0 < \frac{4(1-a)^3}{4-3a} < f_a(x)$

## PROBLEMAS PARA OS MÁIS NOVOS (REOIM, nº 28)

### 28.4. Resolver o sistema de ecuacións

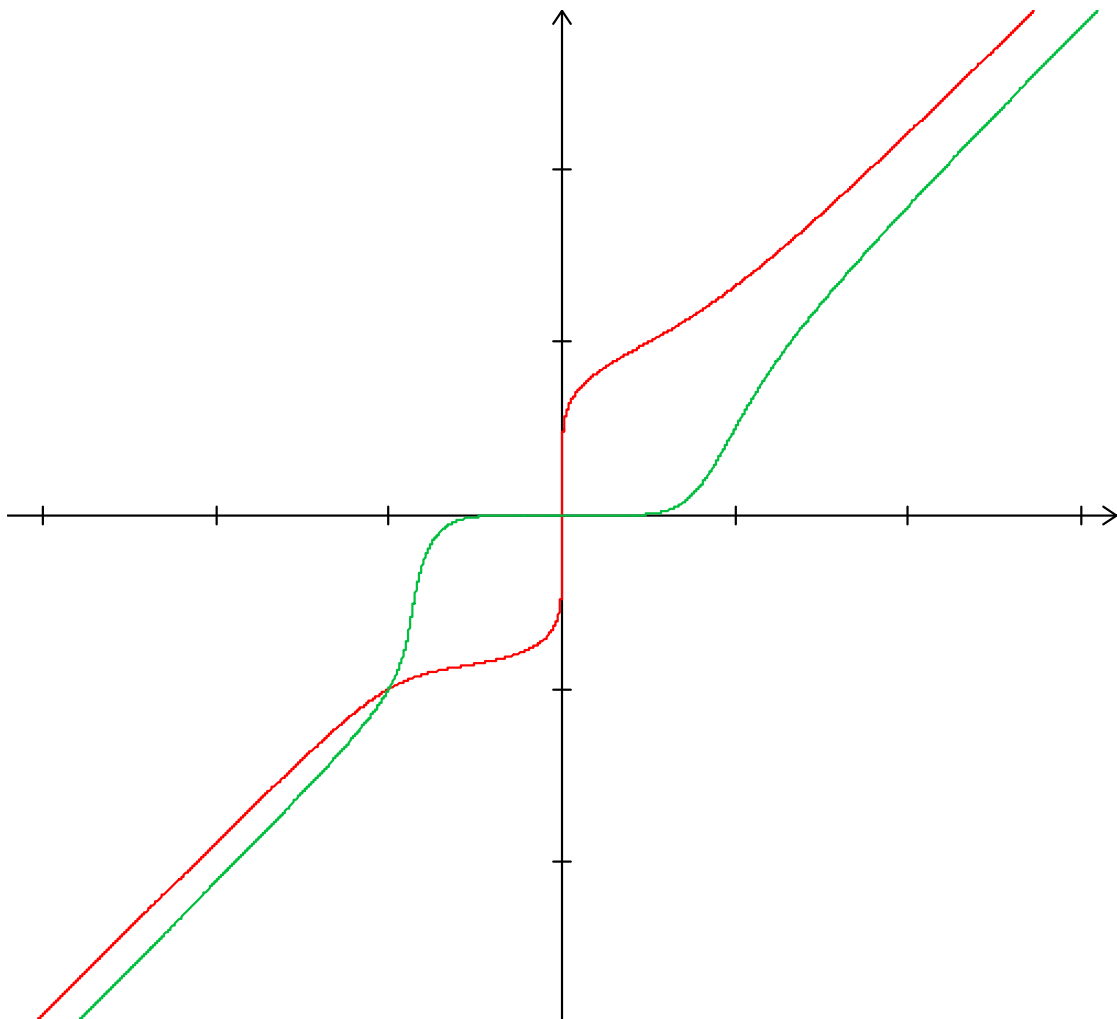
$$\left. \begin{aligned} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) &= 1+y^7 \\ (1+y)(1+y^2)(1+y^4) &= 1+x^7 \end{aligned} \right\}$$

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, Lugo; España)

Sendo  $F(x, y) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4) - (1+y^7) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 - y^7$  e

$G(x, y) = F(y, x)$ , o sistema a resolver é  $\left. \begin{aligned} F(x, y) &= 0 \\ G(x, y) &= 0 \end{aligned} \right\}$ , cuxas solucións son os puntos de corte das

gráficas das funcións  $F(x, y) = 0$  e  $G(x, y) = 0$ , simétricas unha da outra respecto da bisectriz dos cadrantes primeiro e terceiro, que poden obterse utilizando por exemplo o método de Newton-Cramer para representación de curvas alxébricas; obtéñense así as seguintes gráficas, das que se conclúe que as únicas solucións do sistema son  $x = y = -1$  ou  $x = y = 0$ ; a de vermello é a curva  $F(x, y) = 0$  e a de verde é a  $G(x, y) = 0$ :



## PROBLEMAS PARA OS MÁIS NOVOS (REOIM, nº 28)

**28.5. Demostrar que se as lonxitudes  $a, b, c$  dos lados do triángulo son tales que  $a + b + c = 1$ , entón**

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \frac{1}{2}$$

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, Lugo; España)

Sexan  $p$  o semiperímetro,  $R$  o circunraio,  $r$  o inraio e  $S$  a área do triángulo.

Lema 1:  $abc = 4Rrp$

Proba:  $pr = S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ab \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$

Lema 2:  $a^2 + b^2 + c^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$

Proba:

$$p^2 r^2 = S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) = p \left[ p^3 - (a+b+c)p^2 + (ab+bc+ca)p - abc \right]$$

$$p \left[ p^3 - 2pp^2 + (ab+bc+ca)p - 4Rrp \right] = p^2 (-p^2 + ab + bc + ca - 4Rr)$$

$$\Rightarrow r^2 = -p^2 + ab + bc + ca - 4Rr \Rightarrow ab + bc + ca = r^2 + p^2 + 4Rr$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = (2p)^2 - 2(r^2 + p^2 + 4Rr) = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$$

Proposición:  $a^2 + b^2 + c^2 + 4abc = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr + 16Rrp$

Corolario: Se  $p = \frac{1}{2}$ , entón  $a^2 + b^2 + c^2 + 4abc = \frac{1}{2} - 2r^2 < \frac{1}{2}$

Proba: Pola proposición,  $p = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 4abc = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2r^2 - 8Rr + 16Rr \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 2r^2$

# Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoidm/>

Edita:

