Problemas de nivel medio y de Olimpiadas (28)

(URSS 1973) Una circunferencia Γ es tangente, respectivamente en A y B a dos semirrectas de origen O. La paralela a OB trazada por A vuelve a cortar a Γ en C. El segmento OC vuelve a cortar a Γ en E. Las rectas AE y OB se cortan en K.

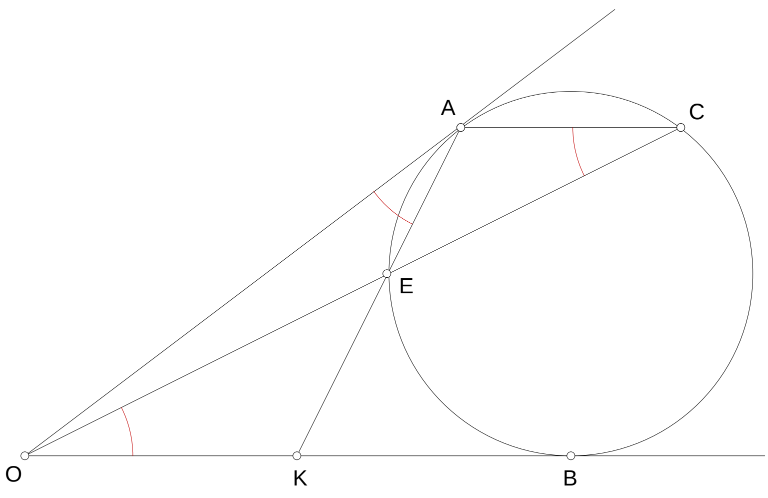
Demostrar que K es el punto medio del segmento OB.

Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España.

Los triángulos AOK y OEK son semejantes porque tienen común el ángulo en K y, además, $\angle OAK = \angle OAE = \angle ACE = \angle ACO = \angle COK = \angle EOK$ (se sigue la penúltima igualdad al ser $AC \| OB$ y los ángulos ACO y COK alternos internos). Por consiguiente, $OK : KA = KE : OK$, esto es, $OK^2 = KE \cdot KA$.

Por otra parte, el teorema de la potencia de un punto respecto de una circunferencia aplicado a K y Γ da $KB^2 = KE \cdot KA$.

El resultado es $OK^2 = KB^2$, de donde $OK = KB$ y, al estar O, K, B alineados, concluímos que K es el punto medio del segmento OB.



Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: