Problema 137

8 de enero de 2007

Propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania. Sea $I(n)$ el número de números impares entre los primeros $2n-1$ números naturales, y sean $S_1(n)$, $S_2(n)$, su suma y la suma de sus cuadrados, respectivamente.

(a) Comparar $I(n)$ con $S_1(n)$.

(b) Hallar todos los números naturales que verifiquen la desigualdad

$$S_2(n) - 3 \cdot I(n) \geq S_1(n).$$

(c) Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_2(n)}{I(n) \cdot S_1(n)}.$$

Solución de José Hernández Santiago, Oaxaca, México.

(a) Los número impares son de la forma $2k-1$ donde $k \in \mathbb{N}$. Los números impares presentes en el intervalo $[1, 2n-1]$ son

$$2(1)-1, 2(2)-1, \ldots, 2(n-1)-1, 2n-1.$$

Luego, $I(n) = n$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}(2k-1) &= 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - n \\ &= n^2 + n - n \\ &= n^2, \end{aligned}$$

y de aquí que $S_1(n) = n^2$. Al tomar el cociente $\frac{I(n)}{S_1(n)}$ observamos que

$$\frac{I(n)}{S_1(n)} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Dado que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ concluimos entonces que

$$\frac{I(n)}{S_1} = o(1).$$

(b)

$$\begin{aligned} S_2(n) &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 \\ &= \frac{4n^3-n}{3}, \end{aligned}$$

luego, dar con los números naturales que satisfacen $S_2(n) - 3 \cdot I(n) \geq S_1(n)$ es equivalente a dar la intersección de $\mathbb{N}$ con el conjunto solución de

$$4n^2 - 3n - 10 \geq 0.$$

Dado que $4n^2 - 3n - 10 = (4n+5)(n-2)$ procedamos a observar la tabla siguiente:

intervalo	signo $(4n+5)$	signo $(n-2)$	signo $(4n+5)(n-2)$
$(-\infty, -\frac{5}{4}]$	-	-	$+$
$(-\frac{5}{4}, 2)$	$+$	-	-
$[2, \infty)$	$+$	$+$	$+$

De ella se sigue, claramente, que

$$\mathcal{S} = \{n \in \mathbb{N} : S_2(n) - 3 \cdot I(n) \geq S_1(n)\} = \mathbb{N}\backslash\{1\}.$$

(c) $I(n) = n$, $S_1(n) = n^2$ y $S_2(n) = \frac{4n^3-n}{3}$. Así,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{S_2(n)}{I(n) \cdot S_1(n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^3-n}{3 \cdot n \cdot n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^3-n}{3n^3} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3n^2}\right) \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

*

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI