MÁXIMOS Y MÍNIMOS SIN DERIVACIÓN : TRES EJEMPLOS

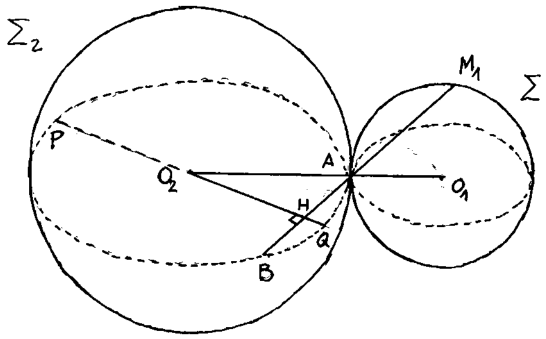
Abderrahim Ouardini
(versión española de F.Bellot)

Ejemplo 1

En el espacio, dos esferas distintas Σ_1 y Σ_2 son tangentes exteriores en el punto A. ¿Cuál es el máximo valor del área del triángulo AM_1M_2 cuando los puntos M_1 y M_2 describen, respectivamente, $\Sigma_1 - \{A\}$ y $\Sigma_2 - \{A\}$?

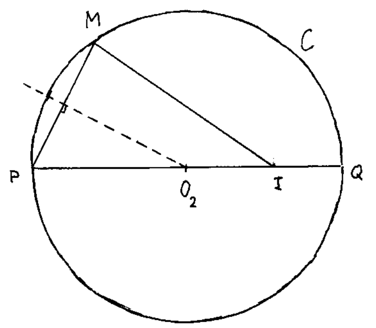
Solución

Fijemos primero el punto M_1. El área del triángulo AM_1M_2 será máxima cuando la distancia del punto M_2 a la recta AM_1 sea máxima. Como M_2 es distinto de A, la recta AM_1 corta a la esfera Σ_2 en un segundo punto B.



En el plano AO_2B (O_1 y O_2 son los respectivos centros de las dos esferas), la mediatriz del segmento AB corta a la esfera Σ_2 en dos puntos distintos P y Q, con $I \in [O_2Q]$, siendo I el punto medio de AB. Si M es un punto cualquiera de Σ_2 se verifica

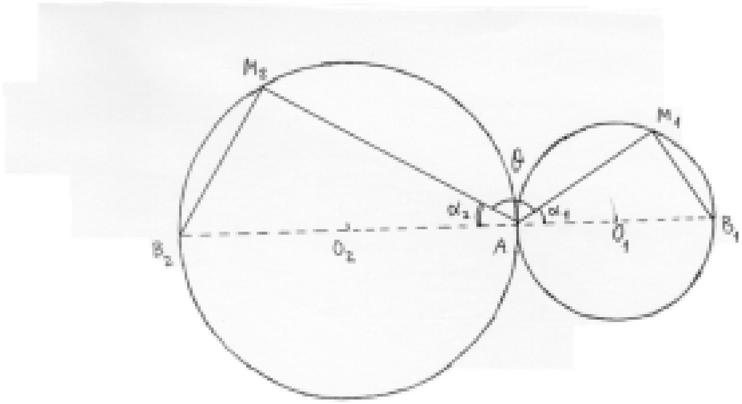
$$IP \geq IM.$$



(En la figura, C es el círculo máximo de Σ_2, intersección del plano PQM con Σ_2).

La desigualdad se justifica porque los puntos I y M están situados en el mismo semiplano limitado por la mediatriz del segmento PM.

Por lo tanto, nuestro problema se convierte en la búsqueda del máximo del área del triángulo AM_1M_2 en el caso en que los cuatro puntos O_1, M_1, M_2 y O_2 son coplanarios (es un plano que pasa por la línea de los centros O_1O_2).



Sea R_i el radio de Σ_i.
Se tiene :

$$Area(AM_1M_2) = \frac{AM_1 \bullet AM_2.sen\theta}{2}.$$

Como

$$AM_1 = 2R_1 \bullet \cos\alpha_1, \quad AM_2 = 2R_2 \bullet \cos\alpha_2,$$

entonces:

$$\begin{aligned} Area(AM_1M_2) &= 2R_1R_2\cos\alpha_1\cos\alpha_2 sen(\alpha_1+\alpha_2) \\ &= R_1R_2[sen(2\alpha_1+\alpha_2)+sen\alpha_2]\cos\alpha_2 \end{aligned}$$

Aquí se ha utilizado la identidad trigonométrica

$$sen(\alpha_1+\alpha_2)\cos\alpha_1 = \frac{1}{2}(sen(2\alpha_1+\alpha_2)+sen\alpha_2).$$

Por lo tanto, podemos deducir que

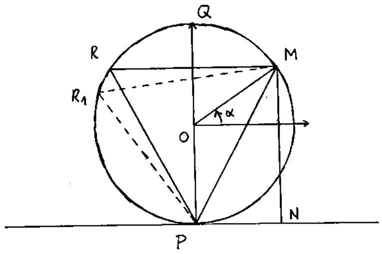
$$Area(AM_1M_2) \leq R_1R_2\cos\alpha_2(1+sen\alpha_2),$$

puesto que $sen(2\alpha_1+\alpha_2) \leq 1$.
Para terminar el problema debemos determinar el máximo de

$$\cos\alpha(1+sen\alpha)$$

cuando α describe el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}[$.
Consideremos los puntos

$$M(\cos\alpha, sen\alpha), \quad N(\cos\alpha, -1).$$



(En la figura, Q es el punto medio de RM)
Entonces se tiene :

$$Area(MNPQ) = QM \bullet QP = \cos\alpha \bullet (1 + sen\alpha).$$

Observamos que el área del rectángulo MNPQ es igual al área del triángulo MPR ; luego $\cos\alpha \bullet (1 + sen\alpha)$ es máxima cuando sea máxima el área de este triángulo. Veamos que si este triángulo tiene área máxima, entonces es equilátero. En efecto, ese triángulo es isósceles (con P el ángulo ”desigual”). Bastará probar que es isósceles con R el ángulo ”desigual”; en efecto, si no fuera así la mediatriz del segmento PM cortaría al arco PM que contiene a R en un punto $R_1 \neq R$, y en ese caso el área de PMR sería menos que el área de PMR$_1$, lo cual es imposible.
Por consiguiente,

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

y el área de AM_1M_2 es menor o igual que $R_1R_2\frac{3\sqrt{3}}{4}$.
El caso de igualdad se verifica si y solamente si

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{6} \text{ y } sen(2\alpha_1 + \alpha_2) = 1,$$

luego $2\alpha_1 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, es decir $\alpha_1 = \frac{\pi}{6}$.■

Ejemplo 2
a) Demostrar que para todo número natural n se verifica

$$(1^5 + 2^5 + \cdots + n^5) + (1^7 + 2^7 + \cdots + n^7) = 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^4$$

b) Utilizando la desigualdad de las medias, determinar el valor mínimo de la expresión

$$\frac{n^3(n+1)^4}{\sqrt[n]{(n!)^6}}$$

cuando $n \in \mathbb{N}^*$.
Solución
a) Lo probaremos por inducción. Para $n = 1$, la igualdad es cierta.
Supongámosla cierta para n. Pongamos

$$A = \sum_{k=1}^{n} k^5 + (n+1)^5 + \sum_{k=1}^{n} k^7 + (n+1)^7,$$

se tiene entonces, por la hipótesis de inducción,

$$
\begin{aligned}
A &= 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^4 + (n+1)^5 + (n+1)^7 \\
&= 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^4 + (n+1)^5\left(1+(n+1)^2\right) \\
&= 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^4 + (n+1)^5(n^2+2n+2) \\
&= (n+1)^4\left(\frac{n^4}{8} + (n+1)(n^2+2n+2)\right) \\
&= \frac{(n+1)^4}{8}(n^4+8n^3+24n^2+32n+16) \\
&= \frac{(n+1)^4}{8}(n+2)^4 \\
&= 2\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^4,
\end{aligned}
$$

que es lo que había que probar.
b) La desigualdad entre las medias aritmética y geométrica da

$$
\begin{aligned}
2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^4 &\geq 2n\sqrt[2n]{(1^5\times 2^5\times\cdots\times n^5)\times(1^7\times 2^7\times\cdots\times n^7)} = \\
&= 2n\sqrt[2n]{(n!)^{12}} = 2n\sqrt[n]{(n!)^6},
\end{aligned}
$$

luego

$$
\frac{n^3(n+1)^4}{\sqrt[n]{(n!)^6}} \geq 2^4 = 16.
$$

Por lo tanto, el mínimo buscado es 16, que se alcanza para $n = 1$.■

Ejemplo 3
Sea n un entero mayor o igual que 2; sin utilizar la derivación, hallar el máximo de

$$
\sum_{1\leq i<j\leq n} sen^2(x_i - x_j),
$$

cuando los números $x_1,\cdots,x_n$ varían en $\mathbb{R}$.
Solución
Se tiene :

$$
\begin{aligned}
\sum_{1\leq i<j\leq n} sen^2(x_i - x_j) &= \sum_{1\leq i<j\leq n}(1-\cos^2(x_i-x_j)) = \\
&= \frac{n(n-1)}{2} - \sum_{1\leq i<j\leq n}\cos^2(x_i-x_j) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

y, por otra parte,

$$\sum_{1\le i<j\le n}\cos^2(x_i-x_j) = \frac{1}{2}\left(\sum_{1\le i<j\le n}(1+\cos 2(x_i-x_j))\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2}+2\sum_{1\le i<j\le n}\cos 2(x_i-x_j)\right) \qquad (2)$$

Puesto que

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\cos 2x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n} sen 2x_i\right)^2 = n+2\sum_{1\le i<j\le n}\cos 2(x_i-x_j) \ge 0,$$

entonces

$$\sum_{1\le i<j\le n}\cos 2(x_i-x_j) \ge -\frac{n}{2} \qquad (3).$$

Como consecuencia de (2), (3) se transforma en

$$\sum_{1\le i<j\le n}\cos^2(x_i-x_j) \ge \frac{1}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2}-\frac{n}{2}\right) = \frac{n(n-2)}{4} \qquad (4).$$

Y de (1) y (4) se deduce

$$\sum_{1\le i<j\le n} sen^2(x_i-x_j) \le \frac{n(n-1)}{2}-\frac{n(n-2)}{4}.$$

Así tenemos que

$$\sum_{1\le i<j\le n} sen^2(x_i-x_j) \le \frac{n^2}{4} \qquad (5).$$

Probemos que $\frac{n^2}{4}$ es el máximo buscado.
Observemos que hay igualdad en (5) si y solamente si (3) es una igualdad, lo que equivale a

$$\sum_{i=1}^{n}\cos 2x_i = \sum_{i=1}^{n} sen 2x_i = 0.$$

Si n es par (= 2k), basta tomar

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = \cdots = x_k = \frac{\pi}{4} \\ x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_{2k} = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Si $n = 2k+1$, escogemos los números reales $x_1,\cdots,x_n$ tales que

$$\begin{cases} x_{2i+1} = -x_{2i+2}, \quad 0 \le i \le k-1 \\ x_{2k+1} = 0 \end{cases}$$

con lo que se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} sen 2x_i = 0,$$

y

$$\sum_{i=1}^{n} \cos 2x_i = 2\sum_{i=0}^{k-1} \cos 2x_{2i+1} + 1 = 2k \cos 2x_1 + 1.$$

Entonces, para que sea

$$\sum_{i=1}^{n} \cos 2x_i = 0,$$

es suficiente tomar

$$x_1 = \frac{1}{2} Arc \cos\left(-\frac{1}{2k}\right).$$

Luego, en efecto, $\frac{n^2}{4}$ es el máximo buscado.■

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI