

## PROBLEMAS DE NIVEL MEDIO Y DE OLIMPIADAS (3)

Presentamos en esta ocasión los problemas de la Fase nacional de la Olimpiada de Croacia 2002, correspondientes a los grados 3 y 4. Agradecemos al Prof. Zeljko Hanjs su amabilidad al enviar el folleto *Mathematical Competitions in Croatia 2002*, en donde figuran los enunciados y las soluciones.

### Grado 3

3.1. Se supone dado el triángulo ABC, con ángulos  $\alpha = \widehat{BAC}$  y  $\beta = \widehat{CBA}$  agudos. Externamente se construyen triángulos isósceles ACD y BCE, con bases AC y BC, y ángulos  $\widehat{ADC} = \beta, \widehat{BEC} = \alpha$ . Sea O el circuncentro de ABC. Probar que  $DO + EO$  es igual al perímetro de ABC si y sólo si  $\widehat{ACB}$  es un ángulo recto.

3.2. Probar que un entero positivo se puede escribir como suma de enteros positivos consecutivos si y sólo si no es una potencia de 2.

3.3. En las diagonales  $AB_1$  y  $CA_1$  de las caras laterales  $ABB_1A_1$  y  $CAA_1C_1$  del prisma triangular  $ABCA_1B_1C_1$  se toman los puntos  $E$  y  $F$ , respectivamente, de manera que  $EF$  es paralelo a  $BC_1$ . Determinar la razón entre las longitudes de los segmentos  $EF$  y  $BC_1$ .

3.4. La población de una isla es de  $n$  nativos. Dos cualesquiera de ellos son, o bien amigos, o bien enemigos. Un día, su jefe ordena a todos los habitantes (incluido él mismo) que hagan collares de piedras, obedeciendo la siguiente regla: dos amigos cualesquiera deben tener al menos una piedra de la misma clase en sus collares; y ningún par de enemigos deben tener piedras de la misma clase en sus collares. (Un collar puede ser vacío también). Probar que la orden del jefe se puede cumplir usando  $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$  clases de piedras, y que no puede cumplirse, en general, si se utiliza un número menor.

### Grado 4

4.1. Determinar la suma de la serie

$$s = 1 + 4x + 9x^2 + \dots + n^2x^{n-1} + \dots$$

si  $|x| < 1$ .

4.2. Los vértices de un cubo en el sistema tridimensional cartesiano de origen O son :  
 $A(1, 1, 1), A'(-1, -1, -1), B(-1, 1, 1), B'(1, -1, -1),$   
 $C(-1, -1, 1), C'(1, 1, -1), D(1, -1, 1), D'(-1, 1, -1).$

El punto O es el centro de la esfera circunscrita al cubo. El punto T no pertenece a esta esfera y  $d = OT$ . Denotamos

$$\alpha = \widehat{ATA'}, \beta = \widehat{BTB'}, \gamma = \widehat{CTC'}, \delta = \widehat{DTD'}.$$

Probar que

$$\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\gamma + \tan^2\delta = \frac{32d^2}{(d^2 - 3)^2}.$$

4.3. Sea

$$f(x) = x^{2002} - x^{2001} + 1.$$

Probar que, para todo entero positivo  $m$ , los números

$$f(m), f(f(m)), f(f(f(m))), \dots$$

son primos entre sí dos a dos.

4.4. Sea  $(a_n), n \in \mathbb{N}$ . Un término  $a_k$  de esta sucesión se llamará *bueno* si puede escribirse como suma de otros términos (no necesariamente distintos) de esta sucesión. Probar que todos los términos de la sucesión, salvo un número finito de ellos, son *buenos*.

# Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

[http://www.campus-oei.org/oim/revista\\_oim/](http://www.campus-oei.org/oim/revista_oim/)

Edita:

