Problema 146

Solución de Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España.

Aplicamos la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica para obtener las siguientes:

$$a = \frac{a+b-c}{2} + \frac{c+a-b}{2} \geq \sqrt{(a+b-c)(c+a-b)} \quad ,$$

$$b = \frac{a+b-c}{2} + \frac{b+c-a}{2} \geq \sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}$$

y

$$c = \frac{b+c-a}{2} + \frac{c+a-b}{2} \geq \sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}$$

de las cuales resulta, al multiplicar miembro a miembro,

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

que podemos escribir en la forma

$$\frac{abc}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} \geq 1$$

si el triángulo ABC es no degenerado.

Con esta última y con la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica resulta, en fin:

$$\begin{aligned}\frac{bc}{a(b+c-a)} + \frac{ca}{b(c+a-b)} + \frac{ab}{c(a+b-c)} &\geq 3\sqrt[3]{\frac{(bc)(ca)(ab)}{abc(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}} \\ &= 3\sqrt[3]{\frac{abc}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}} \\ &\geq 3\sqrt[3]{1} \\ &= 3\end{aligned}$$

Se verifica la igualdad si y sólo si $a = b = c$.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI