Problema 150

Propuesto por Ovidiu Furdui, Kalamazoo, USA.

Sea $\{a\}=a-[a]$ la parte fraccionaria de a. Calcular

$$\int_0^1\int_0^1\left\{\frac{x}{y}\right\}dxdy.$$

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Para cada valor de y, podemos encontrar un número entero no negativo m y un real b, $0\leq b<y$, tales que

$$1=my+b, \qquad 1>\frac{b}{y}=\frac{1}{y}-m\geq 0, \qquad b=y\left\{\frac{1}{y}\right\}, \qquad m=\left[\frac{1}{y}\right].$$

Tenemos entonces que podemos escribir el intervalo $[0,1]$ como unión disjunta de intervalos de la forma $[ny,(n+1)y)$, con $n=0,1,...,m-1$, y adicionalmente el intervalo $[my,1]$. Se tiene entonces que, para un valor de y dado,

$$\int_0^1\left\{\frac{x}{y}\right\}dx=\sum_{n=0}^{m-1}\int_{ny}^{(n+1)y}\left\{\frac{x}{y}\right\}dx+\int_{my}^{1}\left\{\frac{x}{y}\right\}dx=\sum_{n=0}^{m-1}\left(\int_{ny}^{(n+1)y}\frac{x-ny}{y}dx\right)+\int_{my}^{1}\frac{x-my}{y}dx$$

$$=\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{(n+1)^2y^2}{2y}-\frac{n^2y^2}{2y}-ny\right)+\frac{1}{2y}-\frac{m^2y^2}{2y}-m(1-my)$$

$$=\frac{my}{2}+\frac{1}{2y}+\frac{m^2y}{2}-m=\frac{y}{2}\left[\frac{1}{y}\right]+\frac{y}{2}\left\{\frac{1}{y}\right\}^2=\frac{1}{2}-\frac{y}{2}\left\{\frac{1}{y}\right\}\left(1-\left\{\frac{1}{y}\right\}\right).$$

Luego

$$\int_0^1\int_0^1\left\{\frac{x}{y}\right\}dxdy=\frac{1}{2}-\int_0^1\frac{y}{2}\left\{\frac{1}{y}\right\}\left(1-\left\{\frac{1}{y}\right\}\right)dy=\frac{1}{2}-\int_1^\infty\frac{\{z\}(1-\{z\})}{2z^3}dz,$$

donde se ha realizado el cambio de variable $z=1/y$. Calculamos esta última integral:

$$\int_1^\infty\frac{\{z\}(1-\{z\})}{2z^3}dz=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_n^{n+1}\frac{\{z\}(1-\{z\})}{2z^3}dz=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_n^{n+1}\frac{(z-n)(n+1-z)}{2z^3}dz$$

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_n^{n+1}\left(-\frac{n(n+1)}{2z^3}+\frac{2n+1}{2z^2}-\frac{1}{2z}\right)dz.$$

Ahora bien,

$$\int_n^{n+1}-\frac{n(n+1)}{2z^3}dz=\frac{n(n+1)}{4(n+1)^2}-\frac{n(n+1)}{4n^2}=-\frac{2n+1}{4n(n+1)}=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right),$$

$$\int_n^{n+1} \frac{2n+1}{2z^2}\,dz = -\frac{2n+1}{2(n+1)} + \frac{2n+1}{2n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right), \qquad \int_n^{n+1} -\frac{1}{2z}\,dz = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right),$$

con lo que

$$\int_1^{\infty} \frac{\{z\}(1-\{z\})}{2z^3}\,dz = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n} - \ln(N+1)\right) - \frac{1}{4}\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}.$$

Ahora bien, el primer límite es la constante de Euler-Mascheroni *g*, mientras que el segundo es cero, con lo que se llega finalmente a

$$\int_1^{\infty} \frac{\{z\}(1-\{z\})}{2z^3}\,dz = \frac{g}{2} - \frac{1}{4}, \qquad \int_0^1\int_0^1 \left\{\frac{x}{y}\right\} dx dy = \frac{3}{4} - \frac{g}{2}.$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI